Math. Subj. Class./1980/ 10 C 01, 15 A 63, 51 F 25


## POVZETEK DIPLOMSKE NALOGE

Naloga obravnava končnorazsežne vektorske prostore nad poljubnim komutativnim obsegom. Simetrična bilinearna forma, imenovana tudi skalarni produkt določa ortogonalno geometrijo na vektorskem prostoru. Pojem ortogonalna vektorja ohranja svoj že znani pomen: XY = 0 natanko tedaj, ko je X ortogonalen na Y.

Prostore z ortogonalno geometrijo delimo na singularne in nesingularne. Prostor imenujemo singularen, če vsebuje vsaj en vektor, ki je ortogonalen na vse vektorje prostora; če prostor takega vektorja ne vsebuje, ga imenujemo nesingularen prostor. Vektor iz V, ki je ortogonalen na vse vektorje iz istega prostora imenujemo izotropen, prostor vseh izotropnih vektorjev iz V pa imenujemo rad V ali izotropni podprostor prostora V. Singularen prostor lahko vselej zapišemo kot ortogonalno vsoto prostora rad V in nesingularnega podprostora U⊂V. Nesingularni prostor moremo zapisati kot ortogonalno vsoto nesingularnih enorazsežnih podprostorov; z drugimi besedami: nesingularni prostor ima nesingularno ortogonalno bazo. Nesingularni prostor more vsebovati tudi singularne podprostore. Če jih vsebuje, potem ima tudi nesingularne podprostore z bazo iz izotropnih vektorjev. To so tako imenovani hiperbolični podprostori. Dimenzija le - teh je sodo število.

Med preslikavami prostorov so pomembni izomorfizmi, ki ohranjajo skalarni produkt. Imenujemo jih izometrije ali ortogonalne transformacije. Delimo jih na rotacije in zrcaljenja. Množica vseh izometrij prostora V na V je grupa in podmnožica rotacij je podgrupa edinka. Zrcaljenje, ki ohranja vse vektorje neke hiperravnine imenujemo simetrija glede na hiperravnino. Simetrije so zelo pomembne, saj vsako izometrijo lahko zapišemo kot produkt natanko določenega števila simetrij. O izometrijah med nesingularnimi prostori govori Wittov izrek, ki zagotavlja: Če sta V in V' izometrična prostora, je mogoče vsako izometrijo podprostora U⊂V razširiti do izometrije prostora V na V'. Iz tega izreka sledijo mnoge lastnosti nesingularnih prostorov in njihovih podprostorov. Ortogonalna grupa prostora V je množica vseh izometrij prostora V nase. Komutativna je le ortogonalna grupa dvorazsežnega prostora nad obsegom s tremi elementi. Ortogonalne grupe vseh drugih prostorov pa imajo isti centralizator, to je: vsi njihovi elementi komutirajo z istimi izometrijami,

Ortogonalno geometrijo na prostoru nad urejenim obsegom moremo razdeliti v štiri tipe: pozitivno semidefinitno, negativno semidefinitno, pozitivno definitno in negativno definitno geometrijo. Nesingularni prostor more imeti pozitivno definitne in negativno definitne podprostore, pri čemer je dimenzija maksimalnega podprostora izbranega tipa natanko določena.

Literatura: (1) Artin E.: Geometric Algebra
(2) Lang S.: Algebra
(3) Prijatelj N.: Matematične strukture II
(4) Vidav I.: Algebra