KRATEK POVZETEK VSEBINE

Math.Subj.Class. (1985)
14 H 05
20 A 05
30 A 05
30 F XX

Glavni cilj tega dela je dokaz Abelovega izreka, ki pravi, da za algebraično enačbo ene spremenljivke s stopnjo večjo od štiri, ne obstaja izraz, ki bi izražal rešitve dane enačbe z njenimi koeficienti s pomočjo aritmetičnih operacij in radikalov.

Abelov izrek je bil dokazan v začetku 19. stoletja. Moč ga je dokazati tudi s pomočjo splošne Galoisove teorije. Vendar si tu ne bomo ogledali rezultatov, ki jih je razvil francoski matematik E. Galois.

Delo je zasnovano v obliki nalog in zgledov, ki so sestavni del osnovnega teksta. Posamezne trditve in izreki so navadno dokazani v več korakih, skozi posamezne naloge. Obravnavali bomo le funkcije, ki se izražajo z radikali in algebraične funkcije. Omenimo, da velja Abelov izrek tudi za nekatere druge funkcije, npr. za poljubne enolične analitične funkcije.

Na poti do končnega cilja, to je do dokaza Abelovega izreka, nam bodo v pomoč osnovni izrek algebre kompleksnih števil, pojmi in izreki iz teorije grup (rešljive grupe, permutacijske grupe) ter iz teorije funkcij kompleksne spremenljivke.

V uvodu ponovimo postopke reševanja algebraičnih enačb ene spremenljivke od prve do četrte stopnje. Uvidimo, da so rešitve teh algebraičnih enačb izražene z njihovimi koeficienti s pomočjo aritmetičnih operacij in radikalov.

Z namenom, da bi dokazali Abelov izrek, v začetku uvedemo zelo pomemben pojem v teoriji funkcij kompleksne spremenljivke, to je pojem Riemannove ploskve večlične funkcije. Podrobno se z njim seznanimo za funkcijo $w = \sqrt{z}$. Spoznamo, kako konstruiramo Riemannovo ploskev te funkcije. Nato preidemo na konstrukcijo Riemannove ploskve poljubne večlične funkcije $w(z)$. Ugotovimo, da je potreben pogoj pri določanju enoličnih zveznih vej večlične funkcije $w(z)$, da je funkcija $w(z)$ enako določena po zveznosti vzdolž poljubnih dveh krivulj C_1 in C_2, ki ležita na obravnavanem območju in povezujeta poljubno točko z_o s poljubno točko z_1 ravnine z.

Iz pogoja monodromije (str. 39) sledi, da se prehodi iz ene veje na drugo pri prehodu prereza na poljubnem mestu ujemajo s prehodi, ki jih dobimo pri obhodu (v ustrezno smer) razvejišč, iz katerih poteka prerez. Velja še, da za večlično funkcijo $w(z)$, ki izpolnjuje pogoj monodromije, lahko konstruiramo Riemannovo ploskev.

Riemannovo ploskev poljubne večlične funkcije moremo predstaviti s shemo, ki prikazuje, iz kolikih listov sestoji Riemannova ploskev, razvejišča ter prehode med listi pri obhodu razvejišč.

Nato se seznanimo z definicijo funkcije, ki se izraža z radikali. Ugotovimo, da za funkcijo, ki se izraža z radikali, lahko konstruiramo Riemannovo ploskev. Trditve 2, 3 in 4 na str. 60 nam povedo, kako Riemannovo ploskev za te funkcije konstruiramo.

Vsaki shemi Riemannove ploskve priredimo grupo permutacij listov dane sheme. Definiramo jo kot podgrupo, generirano s permutacijami listov Riemannove ploskve, ki ustrezajo obhodom (nasproti gibanju urnega kazalca) vseh razvejišč. Večlični funkciji kompleksne spremenljivke nato priredimo t.i. Galoisovo grupo. Definiramo jo kot grupo permutacij vrednosti večlične funkcije $w(z)$ v neki točki z_0. Ugotovimo, da sta grupa permutacij listov dane sheme Riemannove ploskve in Galoisova grupa izomorfni. Potem dokažemo eno osnovnih trditev naše obravnave, da če se večlična funkcija $w(z)$ izraža z radikali, da je potem Galoisova grupa funkcije $w(z)$ rešljiva (trditev 5, str. 67).

V zaključku obravnavamo konkretno enačbo pete stopnje:

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0 \qquad (1)$$

Funkcija $w(z)$, ki izraža korene enačbe (1), je algebraična in zanjo velja pogoj monodromije. Zato lahko konstruiramo pripadajočo Riemannovo ploskev. Funkciji $w(z)$ prirejena Galoisova grupa je simetrična grupa S_5, ki ni rešljiva. Torej se funkcija $w(z)$ ne izraža z radikali (trditev 5).

Obravnavajoč enačbo

$$(3w^5 - 25w^3 + 60w - z)w^{n-5} = 0$$

dokažemo, da splošna algebraična enačba stopnje n $(n \geq 5)$ ni rešljiva z radikali, kar pa tudi trdi Abelov izrek.

LITERATURA:

1. V.B. Alekseev: Teorema Abelja v zadačah i rešenijah, Nauka, Moskva 1976
2. I. Vidav: Algebra, DMFA SRS, Ljubljana 1980
3. A. Kurosh: Higher algebra, Mir publishers, Moscow 1984