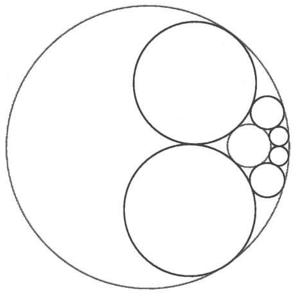
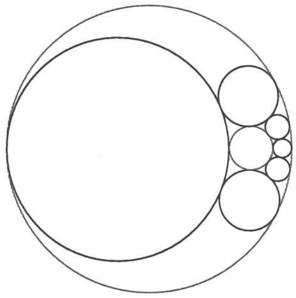
POVZETEK VSEBINE

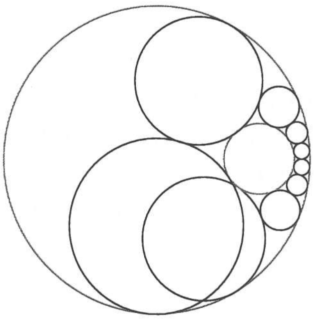
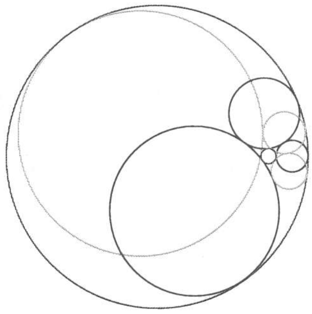
Dani sta dve nekoncentrični krožnici brez skupnih točk. Mednju bi radi napeljali Steinerjevo verigo - verigo, sestavljeno iz krožnic, pri čemer se vsaka krožnica dotika danih dveh in dveh iz verige. Pri tem se mora zadnja krožnica iz verige dotikati prve iz iste verige. Dopuščamo tudi možnost, da veriga večkrat obkroži kakšno od danih krožnic, torej se smejo krožnice iz različnih obhodov tudi sekati. Zanima nas, kakšnim pogojem morajo ustrezati krožnice, da se bo veriga res zaključila.

Oglejmo si par preprostih primerov.

Na zgornji sliki se v obeh primerih veriga lepo zaključi. Začetni krožnici (rdeče) sta obakrat enaki, nanju pa smo napeljali dve različni verigi tangentnih krožnic, ki imata enako število členov. Izkaže se, da se v primeru, ko Steinerjeva veriga obstaja, le-ta izide ne glede na to, kam med dani krožnici postavimo prvo krožnico verige. Torej če obstaja ena Steinerjeva veriga, jih obstaja neskončno mnogo, vse pa so sestavljene iz istega števila krožnic.

Seveda pa med danima dvema krožnicama ne obstaja vselej Stei-

nerjeva veriga, kot nakazuje druga slika.

Narisali smo le del verige tangentnih krožnic. Tudi, če bi jo nadaljevali v več obhodov, se veriga ne bi zaključila.

Iz zgornjih primerov postavimo hipotezo, da obstoj Steinerjeve verige med dvema danima krožnicama ni odvisen od tega, s kakšno krožnico začnemo verigo, pač pa le od danih dveh krožnic. Kakšnim pogojem morata tedaj ustrezati dani krožnici?

Ključno vlogo pri reševanju problema igra inverzija. Obstaja namreč inverzija, s katero se poljubni dve krožnici brez skupnih točk preslikata v koncentrični krožnici. Poleg tega pa vsaka inverzija ohranja Steinerjevo verigo. Problem se torej poenostavi na iskanje pogoja za dve koncentrični krožnici, med katerima obstaja Steinerjeva veriga.

Tudi zgornji primeri so bili skonstruirani s pomočjo inverzije koncentričnih krožnic in njihovih Steinerjevih verig.

V prvih dveh primerih sta inverzni sliki danih krožnic ustrezali pogoju za obstoj Steinerjeve verige med njima, to je:

$$r = R \cdot \cot^2(45^\circ + 90^\circ \cdot \frac{m}{n})$$

kjer sta R in r radija koncentričnih krožnic, m je število obhodov Steinerjeve verige, n pa število krožnic v verigi (v prvem primeru je $m = 1$, $n = 6$ in $r = \frac{1}{3}R$). Rešitve s prve slike obstajajo ne glede na to, kakšen radij inverzije si izberemo. Na drugi sliki pa koncentrični krožnici nista ustrezali pogoju za obstoj Steinerjeve verige, zato posledično Steinerjeva veriga med danima krožnicama ne obstaja.

Math. Subj. Class. (2000): 51MO4
Ključne besede: krožnica, Steinerjeva veriga, tangentna krožnica, inverzija, koaksalni sistem, limitna točka
Keywords: circle, Steiner chain, tangent circle, inversion, coaxal system, limit point

Literatura:

- Roger A. Johnson, John Wesley Young: *Advanced Euclidean Geometry: an elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle*, new Dover ed.
- H. S. M. Coxeter: *Intoduction to Geometry, second edition*, Wiley Classics Library edition, 1989
- M. Vencelj: *Seminar II za pedagoško matematiko*, 1999/2000
- Jean-Marie Laborde & Franck Bellemain: *Cabri Géomètre II*, različica 1.0 MS Windows