## Povzetek

Diplomsko delo obravnava problem tridiagonalnih in sočasnih Hessenbergovih oblik za matrike v majhnih dimenzijah. Večina matrik namreč nima take oblike. Longstaff, Fong in Wu so pokazali, da za $n \geq 5$ obstajajo matrike, ki nimajo take oblike. Po drugi strani pa je lahko videti, da se vsaka $3 \times 3$ matrika in vsaka matrika ranga 2 da tridiagona-lizirati oziroma vsak par slednjih matrik sočasno preoblikovati s podobnostjo v zgornje-Hessenbergovo obliko. Primer $4 \times 4$ matrik se je izkazal za zelo zapletenega. Rešil ga je Pati, ki je z uporabo metod algebraične geometrije dokazal, da se da vsaka $4 \times 4$ matrika tridiagonalizirati. Glavni namen te naloge je prikazati preprostejši dokaz krepkejše verzije Patijevega izreka. Težavnosti se izognemo s tem, da problem tridiagonalizacije zreduciramo na reševanje preproste množice polinomskih enačb, ki so homogene v dveh množicah spremenljivk. Bezoutev izrek nam omogoča natančno prešteti število rešitev. V tretjem, četrtem in petem poglavju si bomo pridobili potrebna znanja algebraične geometrije za dokaz Patijevega izreka, ki sledi v sedmem poglavju. Ogledali si bomo tudi posledice Patijevega izreka, ter realni primer, ki sta ga proučevala matematika Djoković in MacDonald, ki sta našla realno $4 \times 4$ matriko, ki se je ne da tridiagonalizirati z realno ortogonalno matriko. V zadnjem poglavju pa bomo eksplicitno našli $5 \times 5$ matriko ranga 3, ki se je ne da tridiagonalizirati.



**Math. Subj. Class. (2000)**: 14A05, 14A10, 15A21

**Ključne besede**: tridiagonalizacija, sočasna Hessenbergova oblika, Patijev izrek, unitarna podobnost, afine in projektivne raznoterosti, polinomske funkcije, presečne večkratnosti.

**Keywords**: tridiagonalization of matrices, simultaneous Hessenberg form, Pati's Theorem, unitary similarity, affine and projective varieties, polinomial functions, intersection multiplicities.

# Literatura

[1] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer - Verlag, New York, 1997.

[2] K. R. Davidson and D.Ž. Djoković, *Tridiagonal forms in low dimensions*, Linear Alg. Appl. 407 (2005), 169 - 188.

[3] D.Ž. Djoković and M.L. MacDonald, *Orthogonal invariants of a matrix of order four and applications*, J. Pure Appl. Alg.

[4] C. K. Fong and P. Y. Wu, *Band diagonal operators*, Lin. Alg. Appl. **248** (1996), 195 - 204.

[5] G. M. Greuel and G. Pfister, *A Singular Introduction to Commutative Algebra*, Springer - Verlag, Berlin, 2002.

[6] J. Harris, *Algebraic Geometry, A First Course*, Springer Verlag, New York, 1992.

[7] W.E. Longstaff, *On tridiagonalization of matrices*, Lin. Alg. Appl. **109** (1988), 153 - 163.

[8] V. Pati, *Unitary tridiagonalization in* $M(4, \mathbb{C})$, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **111** (2001), 381 - 397.

[9] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, vol.1, 2nd edition, Springer - Verlag, Berlin, 1994.

[10] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer - Verlag, 1998.

[11] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer - Verlag, 1977.

[12] J. Holbrook and J.P. Schoch, *Moving zeros among matrices*, sprejeto v objavo v Linear Alg. Appl.

[13] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 1988.

[14] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison - Wesley Publ. 1969.