Povzetek

Proučevanje dinamike kompleksnih analitičnih preslikav ima dolgo zgodovino. Z iteracijami teh preslikav sta se v 1. polovici 20. stoletja začela podrobneje ukvarjati Fatou [7] in Julia [8]. Kasneje pa so na tem delali tudi Mané, Sad in Sullivan [10],[13],[14], Douady in Hubbard [5], ter Mandelbrot [9], ki so odkrivali bogato dinamiko kompleksnih analitičnih funkcij. Večina se jih je ukvarjala z racionalnimi preslikavami v kompleksni ravnini in s strukturo Juliajeve množice teh preslikav. Juliajeva množica je ponavadi zapletena in dinamika preslikave na tej množici je zelo bogata.

V diplomi pa sem se posvetila dinamiki kompleksne analitične funkcije, ki ni racionalna in sicer eksponentni kompleksni funkciji e^z. Juliajevo množico te funkcije je raziskoval Misiurewicz [11], ki je tudi dokazal, da je $J(e^z)$ cela kompleksna ravnina. Zato so tudi periodične točke e^z goste v $\mathbb{C}$ in preslikava je topološko tranzitivna.

Glavni rezultat je topološka klasifikacija tirov e^z. Kompleksno ravnino razdelimo na pasove in vsakemu tiru priredimo neskončno zaporedje celih števil, ki ga imenujemo vozni red tira. Grobo rečeno nam to zaporedje da vozni red orbite. Ker vsa zaporedja niso možna, moramo izločiti tista, ki prehitro naraščajo. Zato moramo podati potrebne in zadostne pogoje za obstoj tira s predpisanim voznim redom. To nam da semikonjugacijo med e^z in znanim avtomorfizmom pomika.

Pokazali bomo, da obstaja natanko ena periodična točka, ki ustreza vsakemu ponavljajočemu zaporedju neničelnih celih števil. Na vsako tako točko (razen dveh izjem) je pripeta zvezna krivulja, ki jo sestavljajo točke z istim voznim redom. Dve izjemi sta negibni točki, ki ležita v pasovih, ki vsebujeta enotski krog. Tu je dinamika drugačna kot v ostalih pasovih, saj točke z istim voznim redom vsebujejo Cantorjevo množico krivulj. Domnevamo, da tudi tirom, ki imajo neperiodičen vozni red, pripadajo krivulje ali Cantorjeve množice krivulj.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): 30D05

Ključne besede:
Eksponentna funkcija, Dinamični sistemi, Iteracija, Juliajeva množica, Periodične točke.

Keywords:
Exponent function, Dynamical systems, Iteration, Julia set, Periodic points.

Literatura

[1] A. Cayley: *The Newton-Fourier imaginary problem*, Am. J. Math. II, 97, 1879.

[2] Robert L. Devaney: *Chaotic Dynamical Systems Second Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[3] Robert L. Devaney, Michal Krych: *Dynamics of exp(z)*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1984), 4, 35-52.

[4] Robert L. Devaney: *A survey of Exponential Dynamics*, New Progress in Difference Equations, ed. B. Aulbach, S. Elaydi and G. Ladas. Champman & Hall/CRC (2004), 105-122.

[5] A. Douady & J. Hubbard: *Iteration des polynômes quadratiques complex*, C.R. Acad. Sci. Paris 294 18 Janvier, 1982.

[6] Saber N. Elaydi: *Discrete Chaos*, Champman & Hall/CRC, 2000.

[7] P. Fatou: *Sur l'iteration des fonctions transcendantes entieres*, Acta Math. 47 (1926), 337-370.

[8] G. Julia: *Iteration des applications fonctionnelles*, J. Math. Pures Appl. (1918), 47-245.

[9] B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.

[10] R. Mané, P. Sad and D.Sullivan: *On the dynamics of rational maps*, Ann. Éc. Norm. Sup., Vol. 16, 1983, pp. 193-217.

[11] Michal Misiurewicz: *On iterates of exp(z)*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1981), 1, 103-106.

[12] H. O. Peitgen, D. Saupe, F. v. Haeseler: *Cayley's Problem and Julija Sets*, The Mathematical Intelegencer VOL.6, NO.2.

[13] D. Sullivan: *Conformal dynamical systems*, Lecture Notes in Math., No. 1007, 1981, pp. 725-752.

[14] P. Sullivan: *Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics III*, Preprint IHES/M/83/.

[15] M. Viana da Silva: *The differentiability of the hairs of exp(z)*, Proceeding Of The American Mathematical Society, Volume 103, Number 4, August 1988.