Povzetek

Osrednja tema diplomskega dela je Poincaréjeva metrika na odprtem enotskem disku v kompleksni ravnini in Farkas-Rittov izrek.

Temelj Farkas-Rittovega izreka je Schwarzeva lema, zato je prvo poglavje namenjeno tej lemi. Obravnavamo tudi lemo s šibkejšimi predpostavkami, ki jo imenujemo Schwarz-Pickova lema. Opišemo tudi nekatere druge, manj znane različice Schwarzeve leme.

Enotski disk opremimo s Poincaréjevo metriko. Definiramo tudi preslikave na kompleksnih območjih, ki ohranjajo razdalje in jih imenujemo izometrije. Ugotovimo, da so edine preslikave, ki ohranjajo Poincaréjevo metriko, kompozitumi Möbiusovih transformacij in rotacij.

Ugotovimo, da se topologija, ki jo inducira Poincaréjeva metrika, ujema s topologijo, ki jo inducira evklidska metrika. Dokažemo tudi, da je enotski krog, opremljen s Poincaréjevo metriko, poln metričen prostor. Iz teh lastnosti, Schwarz-Pickove leme in predpostavke, da je zaloga vrednosti holomorfne funkcije kompaktno zaprta v disku, dobimo rezultat, da obstaja natanko ena negibna točka. To je Farkas-Rittov izrek, ki ga obravnavamo v drugem poglavju.

V tretjem poglavju definiramo ukrivljenost na odprtih območjih. Spoznamo, da je ukrivljenost na disku, ki je opremljen s Poincaréjevo metriko, konstantna. Z uporabo ukrivljenosti in Schwarzeve leme na enostaven način dokažemo Liouvillov in Picardov izrek.

Zaključimo s Schwarzevo lemo v omejenem območju, kjer vidimo kakšne ocene veljajo za holomorfne funkcije in njihove odvode. Kot posledico teh ocen in Schwarzevega principa zrcaljenja, dobimo neenakost med dolžino originala in dolžino slike krožnega loka.

Diplomsko delo je povzeto po gradivu [5] in [6], pri uporabi ostalega je ustrezno navedeno.

Math. Subj. Class. (MSC 2010): `30C80`, `30H05`, `30H10`, `30N15`, `54C30`, `58B12`

Ključne besede:
Schwarzeva lema, holomorfna funkcija, princip maksima modula, Schwarz-Pickova lema, Möbiusova transformacija, lomljena linearna transformacija, povlek, izometrija, potisk, Poincaréjeva metrika, Farkas-Rittov izrek, ukrivljenost, cela funkcija

Keywords:
Schwarz lemma, holomorphic function, maximum modulus principle, Schwarz-Pick lemma, Möbius transformation, linear fractiona map, pullback, isometry, push-forward, Poincaré metric, Farkas-Ritt theorem, curvature, entire function

Literatura

[1] A.F. Beardon and D. Minda. The hyperbolic metric and geometric function theory. *Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications, Narosa Publishing House, India*, pages 10–55, 2006.

[2] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I.* Graduate texts in Mathemathics. Springer Verlag, 2nd edition, 1995.

[3] Theodore W. Gamelin. *Complex Analysis.* Springer, 2001.

[4] L. Keen and N. Lakic. A generalized hyperbolic metric for plane domains. In Richard Douglas Canary, editor, *In the tradition of Ahlfors-Bers,IV: Ahlfors-Bers Colloquium*, pages 107–118. American Mathematical Society, 2007.

[5] Steven G. Krantz. *Complex Analysis: The geometric viewpoint.* Number 23. Carus Mathematical Monographs, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2004.

[6] Steven G. Krantz. *Geometric Function Theory. Eksplorations in Complex Analysis.* Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.

[7] W. Ma and D. Minda. Geometric properties of hyperbolic geodesics. *Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications, Narosa Publishing House, India*, pages 166–186, 2006.

[8] Robert Osserman. A sharp schwarz inequality on the boundary. *Proc. Amer. Math. Soc*, (128):3513–3517, 2000.

[9] Reinhold Remmert. *Theory of Complex Functions.* Graduate texts in Mathemathics. Springer Verlag, 2nd edition, 1990.

[10] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1970.