Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Matematika – računalništvo z matematiko (UNI)

Andreja Podobnik

Racionalne aproksimacije in verižni ulomki

Diplomsko delo

Ljubljana, 2010

Kazalo

Program dela

V diplomskem delu obravnavajte racionalne približke iracionalnih števil. Pomagajte si tudi s teorijo verižnih ulomkov. Nato obravnavajte še posplošitev na kompleksna iracionalna števila. Za osnovno literaturo uporabite knjigo I. Niven: *Irrational Numbers*, The Mathematical Association of America, 1956.

Ljubljana, marec 2010

doc. dr. Sašo Strle

Zahvala

Zahvaljujem se svoji dužini, ki je potrpežljivo čakala in mi stala ob strani skozi vsa leta, ki sem jih preživela na faksu.
Posebej bi se rada zahvalila svojemu mentorju, doc. dr. Sašu Strletu, ki me je vodil in potrpežljivo popravljal moje napake pri pisanju diplomskega dela.
Hvala tudi vsem ostalim, ki ste mi vedno stali ob strani.

Povzetek

V diplomskem delu obravnavamo racionalne približke iracionalnih števil. Videli bomo, da lahko za poljubno iracionalno število α poiščemo tako celo število k, da bo njun produkt poljubno blizu najbližjemu celemu številu. Pri preverjanju bomo uporabili Dirichletovo načelo. Nato bomo zapisali nekatera dejstva, ki veljajo za verižne ulomke. Spoznali bomo preproste verižne ulomke in neskončne preproste verižne ulomke, ki jih bomo kasneje uporabili pri bolj natančni omejitvi konstante za aproksimacijo iracionalnih števil. Na koncu bomo vse rezultate posplošili še na kompleksna števila. Ker verižni ulomki za kompleksna iracionalna števila niso dovolj dobro definirani, bomo rezultate preverili geometrijsko.

Math. Subj. Class. (2010): 30E10, 11A05, 11J70, 11A55
Ključne besede: aproksimacija na kompleksni ravnini, evklidov algoritem, verižni ulomki
Keywords: Approximation in the complex domain, Euclidean algorithm, Continued fractions

Uvod

V prvem poglavju se bomo ukvarjali z aproksimacijo realnih iracionalnih števil z racionalnimi števili. To pomeni, da bomo iskali racionalna števila, ki so zelo blizu danemu iracionalnemu številu. Pri tem nas bo zanimalo, kako blizu iracionalnemu številu je posamezno racionalno število. Vemo že, da so iracionalna števila tista, ki jih ne moremo predstaviti z ulomkom $\frac{a}{b}$, kjer je $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$. Najbolj znana iracionalna števila so zagotovo $\pi, \sqrt{2}$, itn. Skoraj vsa iracionalna števila so transcendentna. Transcendentno število je vsako (kompleksno) število, ki ni algebraično, torej ni rešitev nobene polinomske enačbe oblike $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0 = 0$ z racionalnimi koeficienti, kjer je $n \geq 1$. Rezultate, ki jih bomo dobili v $\mathbb{R}$, bomo posplošili tudi na $\mathbb{R}^m$. Absolutna vrednost razlike med iracionalnim in racionalnim številom je groba ocena o tem kako dober približek iracionalnemu številu je neko racionalno število. Ker so racionalna števila gosta v obsegu realnih števil, lahko vedno najdemo tako racionalno število, ki bo poljubno blizu izbranemu iracionalnemu številu. Ta ocena nam torej pove kako kakovostna je določena aproksimacija.

V drugem poglavju bomo zapisali nekaj bistvenih lastnosti za verižne ulomke. S preučevanjem verižnih ulomkov so se začeli ukvarjati zaradi želje po "čisti" predstavitvi realnih števil. Najprej povejmo, da je verižni ulomek oblike

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

ki ga krajše zapišemo $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Pri tem je $a_0 \in \mathbb{Z}$, vsi $a_i \geq 1$ za $i \geq 1$. Verižni ulomek oblike $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ imenujemo neskončni verižni ulomek in predstavlja iracionalno število, izraz $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ pa imenujemo končni verižni ulomek in prestavlja racionalno število. Izbrano realno število lahko v verižni ulomek razvijemo s pomočjo Evklidovega algoritma.

V teoriji števil se z aproksimacijo realnih števil z racionalnimi števili ukvarja Diofantska aproksimacija, ki si jo bomo ogledali v tretjem poglavju. Pokazali bomo, da za dani imenovalec najboljši približek poiščemo prav s pomočjo verižnega ulomka in, da velja

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{c}{k^2},$$

kjer je $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

V zadnjem, četrtem, poglavju pa se bomo posvetili posplošitvam rezultatov na kompleksna iracionalna števila. Ker si tu ne bomo mogli pomagati z verižnimi ulomki, bomo rezultate predstavili geometrijsko. Spoznali bomo dejstva o sferah inverzije, ki v $\mathbb{R}^2$ slikajo krožnice in premice v krožnice in premice, v $\mathbb{R}^3$ pa sfere in ravnine slikajo v sfere in ravnine. Pokazali bomo, da lahko kompleksna iracionalna števila najbolje aproksimiramo z

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{|q|^2},$$

pri čemer je $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

POGLAVJE 1

Aproksimacija iracionalnih števil z racionalnimi števili

1. Problem

Za dano iracionalno število α obstajajo racionalna števila h/k, ki so zelo blizu α, torej je razlika $\left|\alpha - \frac{h}{k}\right|$ majhna. Zanima nas, kako majhna je lahko ta razlika.
Ker so tako racionalna števila, kot tudi iracionalna števila gosta povsod na realni osi, lahko za poljuben $\epsilon > 0$ izberemo tak h/k, da velja $\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \epsilon$. Če predpostavimo še, da je $k > 0$, to lahko zapišemo tudi kot $|k\alpha - h| < k\epsilon$.
Problem zapišimo še z drugimi besedami:
Dano imamo iracionalno število α. Ali lahko najdemo tak $k > 0$, da je $k\alpha$ poljubno blizu najbližjemu celemu številu? Odgovor je DA.

Trditev 1.1. *Za vsako iracionalno število α, obstaja neskončno mnogo takih racionalnih števil h/k, da velja $\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}$.*

Ta in podobni problemi so rešljivi z metodo, ki jo poznamo pod imenom Dirichletovo načelo oziroma princip, ki pravi:

> Če imamo $n + 1$ predmetov in n predalov, ter želimo vse predmete pospraviti v predale, potem bosta vsaj v enem predalu vsaj dva predmeta.

Dokaz trditve 1.1. Naj bo n neko pozitivno celo število in α dano iracionalno število. Vzemimo $n + 1$ realnih števil oblike

$$0, \alpha - \lfloor \alpha \rfloor, 2\alpha - \lfloor 2\alpha \rfloor, \ldots, n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \tag{1}$$

in njihovo porazdelitev v n podintervalov $\frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n}$, za $j = 0, 1, \ldots, n-1$, ki pokrivajo polodprt enotski interval $0 \leq x < 1$. Celoten enotski interval vsebuje $n+1$ vrednosti oblike $i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor$, za $i = 0, 1, \ldots, n$ in je razdeljen v n podintervalov, zato po prej omenjenem Dirichletovem načelu najmanj dve točki te oblike ležita v istem intervalu. Recimo, da sta ti dve točki: $n_1\alpha - \lfloor n_1\alpha \rfloor$ in $n_2\alpha - \lfloor n_2\alpha \rfloor$, kjer je $n_1 < n_2$. Ker je dolžina vsakega podintervala $\frac{1}{n}$ in je vsak podinterval na podoben način polodprt, je razlika dveh števil, ki ležita v istem intervalu, manjša od $\frac{1}{n}$:

$$|n_2\alpha - \lfloor n_2\alpha \rfloor - n_1\alpha + \lfloor n_1\alpha \rfloor| < \frac{1}{n}.$$

Vzamemo za k pozitivno celo število

$$k := n_2 - n_1$$

in

$$h := \lfloor n_2\alpha \rfloor - \lfloor n_1\alpha \rfloor,$$

da končno dobimo

$$(2) \qquad |k\alpha - h| < \frac{1}{n}; \quad k \leq n \qquad \text{oziroma, ker } k > 0: \quad \left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{nk}.$$

Ker pa je še $k \leq n$, velja tudi

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}.$$

Zdaj moramo pokazati še, da je takšnih parov števil (h, k) neskončno mnogo. Recimo, da je takih parov števil le končno mnogo; naj bodo

$$(h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots, (h_r, k_r)$$

vsi takšni pari. Dokazati želimo, da je zgornja predpostavka napačna. To bomo storili tako, da bomo poiskali še en par (h, k), ki zadošča (2).
Definirajmo ϵ kot minimum naslednjih števil

$$\left|\alpha - \frac{h_1}{k_1}\right|, \left|\alpha - \frac{h_2}{k_2}\right|, \dots, \left|\alpha - \frac{h_r}{k_r}\right|.$$

Ker je α iracionalno število, je $\epsilon > 0$, saj je ϵ najmanjše število izmed zgoraj zapisanih razlik.
Izberimo n tako, da je $\frac{1}{n} < \epsilon$. Po prvem delu dokaza lahko najdemo par (h, k), za katerega velja (2), torej

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{nk} \leq \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Iz definicije ϵ sledi, da $\frac{h}{k} \neq \frac{h_i}{k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$. Ker smo našli še vsaj en par, ki ustreza pogoju, smo pokazali, da je takih parov neskončno mnogo. □

Posledica 1.2. *Za vsako iracionalno število α in vsako pozitivno celo število n, obstajata taki celi števili h in k, da velja $0 < k \leq n$ in $|k\alpha - h| < \frac{1}{n}$.*

Dokaz. Ta rezultat sledi iz dokaza trditve 1.1 in prve zveze (2). □

Trditev 1.3. *Realno število α je iracionalno, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja neskončno mnogo parov celih števil (x, y), da je $0 < |\alpha x - y| < \epsilon$.*

Dokaz. Najprej: že v dokazu trditve 1.1 smo pokazali, da če je α iracionalno število, potem lahko dobimo neskončno mnogo parov (x, y) izmed parov (h, k), tako da uporabimo le tiste za katere velja $\frac{1}{n} < \epsilon$.
Obrat bomo dokazali s protislovjem. Če je α racionalno število, na primer $\alpha = \frac{a}{b}$ in $b > 0$, potem je $|\alpha x - y|$ spet racionalno število za vsak par celih števil (x, y). Poglejmo si:

$$|\alpha x - y| = \left|\frac{a}{b}x - y\right| = \left|\frac{ax - yb}{b}\right| = \frac{u}{b},$$

torej

$$|\alpha x - y| = \frac{u}{b}, \text{ kjer je } u = |ax - yb| \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Če izberemo $\epsilon < \frac{1}{b}$, ugotovimo, da noben od parov celih števil ne more zadostiti neenačbi, navedeni v trditvi. Res, če za par celih števil (x, y) velja $|\alpha x - y| > 0$, potem velja tudi $|\alpha x - y| = \frac{u}{b} \geq \frac{1}{b} > \epsilon$. Dobili smo protislovje in tako dokazali, da α mora biti iracionalno število. $\square$

2. Posplošitev

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da za dano iracionalno število α obstaja tak $k \in \mathbb{Z}$, da je $k\alpha$ poljubno blizu celemu številu. To idejo želimo posplošiti na dve ali več iracionalnih števil. Poglejmo si primer dveh iracionalnih števil α_1 in α_2.

Torej: ali za dani α_1 in α_2 lahko najdemo nek k, da sta $k\alpha_1$ in $k\alpha_2$ obe poljubno blizu celemu številu.
In še: ali lahko najdemo taki celi števili k_1 in k_2, da bo linearna kombinacija $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ poljubno blizu celemu številu?
Problem bomo postavili še bolj splošno.

Definicija 1.1. *Podmnožico $\mathbb{Z}^m$ točk s celoštevilskimi koordinatami v $\mathbb{R}^m$ imenujemo (celoštevilska)* mreža.

Izberimo matriko realnih števil $A = (\alpha_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$. Opazujmo n linearnih kombinacij $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} k_j$, za $i = 1, 2, \ldots, n$.
Zanima nas ali lahko točko na mreži s koordinatami $(k_1, \ldots, k_m)$ izberemo tako, da je vsak od n linearnih funkcionalov poljubno blizu celemu številu.
Torej, če pogledamo na n linearnih funkcionalov kot na koordinate točk v prostoru, je ta točka lokalizirana poljubno blizu točke na mreži $(h_1, \ldots, h_n)$ v n-prostoru. Zahtevamo še, da niso vse k_j enake nič, torej $\sum |k_j| \neq 0$. Zapišimo to bolj formalno.

Izrek 1.4. *Za naravni števili m in n naj bo $A = (\alpha_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$ matrika mn realnih števil. Naj bo $\tau \geq 1$ neko realno število. Definirajmo še $T = \lceil \tau \rceil$. Potem obstajata taki točki $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ in $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$, da velja $|k_j| \leq T^{\frac{n}{m}}$, za vsak $j = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{j=1}^{m} |k_j| \neq 0$ in*

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} k_j - h_i \right| < \frac{1}{\tau} \qquad \text{za vsak } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokaz. Izberimo neko naravno število q. Za izbrani q imamo $(q+1)^m$ točk $(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{Z}^m$ z lastnostjo $0 \leq y_j \leq q$ in $(q+1)^m$ ustrezajočih točk $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, katerih koordinate so: $\omega_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} y_j$. Naj bo x_i tako celo število, da je $0 \leq x_i - \omega_i < 1$, za vsak $i = 1, \ldots, n$, torej $x_i = \lceil \omega_i \rceil$. Na tak način pridobimo iz $(q+1)^m$ točk v $\mathbb{R}^n$ nabor Q, ki sestoji iz točk oblike $(x_1 - \omega_1, x_2 - \omega_2, \ldots, x_n - \omega_n)$. Te točke ležijo v enotski kocki v n-dimenzionalnem prostoru. Glede na to, kako smo izbrali x_i, je ta enotska kocka polodprta. Zdaj jo z mrežo hiperravnin, vzporednih stranskim ploskvam, razdelimo v T^n manjših kock s stranico $\frac{1}{T}$. Vsaka od nastalih podkock je na podoben način polodprta. Nastavimo $q = \lfloor T^{\frac{n}{m}} \rfloor$, da velja $(q+1)^m = (\lfloor T^{\frac{n}{m}} \rfloor + 1)^m > (T^{\frac{n}{m}})^m = T^n$. Imamo torej $(q+1)^m$ točk v Q, ki so razdeljene po podkockah s stranico $\frac{1}{T}$. Ker je točk več, kot podkock, ne morejo vse ležati v različnih podkockah. Po Dirichletovem principu morata torej najmanj dve točki ležati v isti podkocki. Recimo, da sta to točki $(x_1 - \omega_1, \ldots, x_n - \omega_n)$ in $(x_1' - \omega_1', \ldots, x_n' - \omega_n')$; $\omega_i' = \sum \alpha_{ij} y_j'$ in $(y_1', \ldots, y_m') \neq (y_1, \ldots, y_m)$, $0 \leq y_i' \leq q$. Ker sta točki v isti podkocki, se poljubni koordinati razlikujeta za manj kot $\frac{1}{T}$. Zato velja: $\frac{1}{T} > |x_i - \omega_i - x_i' + \omega_i'| = |\sum \alpha_{ij}(y_j' - y_j) - (x_i' - x_i)|$, za vsak $i = 1, \ldots, n$. Vzemimo $y_j' - y_j$ za k_j in $x_i' - x_i$ za h_i, ter uporabimo dejstvo, da je $\tau \leq T$.

$$\left|\sum \alpha_{ij}(y_j' - y_j) - (x_i' - x_i)\right| = \left|\sum \alpha_{ij} k_j - h_i\right| < \frac{1}{\tau}$$

Zdaj samo še preverimo ali k_j res zadošča neenačbam navedenim v izreku. Ker $0 \leq y_j \leq q$ in podobno tudi $0 \leq y_j' \leq q$, sledi $|k_j| = |y_j' - y_j| \leq q = \lfloor T^{\frac{n}{m}} \rfloor \leq T^{\frac{n}{m}}$. Nato uporabimo dejstvo, da sta točki na mreži $(y_1, \ldots, y_m)$ in $(y_1', \ldots, y_m')$ različni. To dejstvo nam pove, da je $k_j \neq 0$ za vsaj en j in je zato $\sum |k_j| \neq 0$. □

Posledica 1.5. *Za vsak nabor realnih števil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in vsako celo število $t \geq 1$, obstaja taka točka $(k_1, \ldots, k_m, h) \in \mathbb{Z}$, s $|k_j| < t$ za vsak $j = 1, \ldots, m$ in $\sum |k_j| \neq 0$, da je $|k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m - h| < \frac{1}{t^m}$.*

Dokaz. Zamenjajmo τ iz izreka 1.4 s t^m, n zamenjajmo z 1. Ker je $n = 1$ zamenjajmo α_{ij} z α_j in h_1 zamenjajmo s h, da dobimo $T = t^m$ oziroma $T^{\frac{n}{m}} = t$ in rezultat sledi. □

Trditev 1.6. *Za poljubna realna števila $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ obstaja neskončno mnogo naborov celih števil $k, q_1, q_2, \ldots, q_n$, kjer je $k > 0$, da velja*

$$\left|\alpha_i - \frac{q_i}{k}\right| < \frac{1}{k\sqrt[n]{k}} \text{ za vse } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Dokaz. V izreku 1.4 zamenjajmo m z 1, α_{i1} z α_i in uporabimo τ samo kot pozitivno celo število, da je $\tau = T$. Ugotovimo, da imamo za vsako pozitivno število T točko na mreži $(k_1, h_1, h_2, \ldots, h_n)$ z $0 < |k_1| \leq T^n$, da velja $|\alpha_i k_1 - h_i| < \frac{1}{T}$ za vse $i = 1, \ldots, n$. Zgornje neenačbe prav tako veljajo za točko $(-k_1, -h_1, -h_2, \ldots, -h_n)$; izberimo torej tisto točko od teh dveh, ki ima pozitiven prvi člen in jo določimo za $(k, q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Zdaj vemo, da za vsako celo število T obstaja točka na mreži $(k, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, za katero velja $0 < k \leq T^n$ in

$$|\alpha_i k - q_i| < \frac{1}{T} \text{ za vse } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Od tod sledi neenačba (3), saj iz $k < T^n$ sledi $\frac{1}{T} < \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$. Ostane nam še, da dokažemo, da neskončno mnogo naborov celih števil zadošča (3). Dokaz razdelimo na dva dela:

(1) Če so vsa števila $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ racionalna, lahko za k izberemo skupen imenovalec števil α_i. S tem bomo napravili razliko (3) poljubno majhno oziroma kar enako

0. Če naj bo $\alpha_i = \frac{q_i}{k}$, mora biti $q_i = k \cdot \alpha_i$, ki je celo število. Vsi večkratniki k so enako dobri, zato imamo s to rešitvijo neskončno mnogo možnosti.

(2) Predpostavimo, da je vsaj eno od α_i iracionalno število. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je to kar α_1. Če bi bilo le končno mnogo naborov celih števil $k, q_1, q_2, \ldots, q_n$, ki zadoščajo (3), bi bilo le končno mnogo ustrezajočih vrednosti $|\alpha_1 k - q_1|$. Poleg tega bi bile tudi vse pozitivne, ker so iracionalne. Vendar pa bi se lahko zgodilo, da bi pri dovolj velikem T ta vrednost presegla $\frac{1}{T}$, saj $\frac{1}{T}$ teži k 0, ko T raste v neskončnost.
Po drugi strani pa smo že na začetku dokazali, da za celo število T lahko dobimo različen nabor celih števil $k, q_1.q_2, \ldots, q_n$, za katerega velja (4). To dvoje pa je v protislovju, torej je takih naborov celih števil, ki zadoščajo (3), res neskončno mnogo.

□

3. Linearno neodvisni nabori števil

Če so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linearno odvisna nad obsegom racionalnih števil, lahko neenakost v trditvi 1.6 zamenjamo z močnejšim pogojem.

TRDITEV 1.7. *Predpostavimo, da je le m izmed realnih števil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ linearno neodvisnih nad obsegom racionalnih števil. Potem obstaja konstanta c in neskončno mnogo naborov celih števil $k, q_1, q_2, \ldots, q_n$ s $k > 0$, da velja $|\alpha_i - \frac{q_i}{k}| < \frac{c}{k \sqrt[m]{k}}$ za vse $i = 1, \ldots, n$.*

DOKAZ. Če je $m = n$ in $c = 1$, dobimo trditev 1.6. Zato lahko predpostavimo, da je $m < n$ in uredimo števila tako, da so $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ linearno neodvisna nad obsegom racionalnih števil in je vsako od $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ linearna kombinacija prvih m števil z racionalnimi koeficienti. Z uporabo skupnega imenovalca $b > 0$ za dane racionalne koeficiente, imamo relacije s celimi števili a_{ij} oblike

$$\alpha_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j \quad \text{za } i = m+1, m+2, \ldots, n. \tag{5}$$

Če uporabimo trditev 1.6 na seznamu števil $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, obstaja neskončno mnogo naborov celih števil $k', q_1',, \ldots, q_m'$ s $k' > 0$ in zanje velja

$$\left|\alpha_j - \frac{q_j'}{k'}\right| < \frac{1}{k' \sqrt[m]{k'}} \quad \text{za vse } j = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Za $i > m$ z uporabo (5) in (6) dobimo

$$\left|\alpha_i - \frac{1}{bk'} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j'\right| = \left|\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j - \frac{1}{bk'} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j'\right| \leq \tag{7}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{a_{ij}}{b}\right| \left|\alpha_j - \frac{q'_j}{k'}\right| < \sum_{j=1}^{m} \frac{|a_{ij}|}{b} \cdot \frac{1}{k' \sqrt[m]{k'}} =$$

$$= \frac{1}{bk' \sqrt[m]{k'}} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Definiramo $k = bk'$, $q_i = bq'_i$ za $i = 1, \ldots, m$ in $q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q'_j$ za $i = m+1, \ldots, n$. Tako smo dobili neskončno mnogo naborov celih števil $k, q_1, \ldots, q_n$. Zdaj lahko (6) zapišemo kot $\left|\alpha_j - \frac{q_j}{k}\right| < \frac{b \sqrt[m]{b}}{k \sqrt[m]{k}}$ za $j = 1, \ldots, m$, (7) pa lahko zapišemo kot $\left|\alpha_j - \frac{q_j}{k}\right| < \frac{1}{k \sqrt[m]{k}} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ za $i = m+1, \ldots, n$. Če definiramo c kot maksimum števil $b \sqrt[m]{b}$ in $\sqrt[m]{b} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ za $i = m+1, \ldots, n$, potem zares velja $\left|\alpha_j - \frac{q_j}{k}\right| < \frac{c}{k \sqrt[m]{k}}$ za vse $j = 1, \ldots, n$. □

POGLAVJE 2

Verižni ulomki

1. Evklidov algoritem

Imejmo par tujih celih števil u_0 in u_1, $u_1 > 0$. Algoritem za deljenje pokaže, da če u_0 delimo z u_1, dobimo natanko en kvocient $\left\lfloor \frac{u_0}{u_1} \right\rfloor$ in en ostanek, označimo ga u_2, za katerega veljajo neenakosti $0 \leq u_2 < u_1$. Če je $u_2 \neq 0$, lahko postopek nadaljujemo tako, da u_1 delimo z u_2. Ta postopek nam kot rezultat da Evklidov algoritem.

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1 \cdot \left\lfloor \frac{u_0}{u_1} \right\rfloor + u_2 \\ &\vdots \\ u_m &= u_{m+1} \cdot \left\lfloor \frac{u_m}{u_{m+1}} \right\rfloor . \end{aligned} \tag{8}$$

Ostanki zadoščajo $0 < u_{i+1} < u_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$. Zadnji neničelni ostanek, u_{m+1}, je največji skupni delitelj števil u_0 in u_1 in po predpostavki je $u_{m+1} = 1$. V posebnem primeru, ko je že $u_1 = 1$, je ulomek $\frac{u_0}{u_1}$ celo število in $m = 0$.

Če označimo $\xi_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$ in $a_i = \lfloor \xi_i \rfloor$ za $0 \leq i \leq m$, lahko enačbe (8) zapišemo kot

$$\xi_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{\xi_i}. \tag{9}$$

Iz enačb (9) lahko izločimo ξ_1 z uporabo enačb za $i = 1$ in $i = 2$, nato lahko iz istega sistema enačb izločimo tudi ξ_2 z upoštevanjem enačb za $i = 3$:

$$\begin{aligned} i = 1: &\qquad \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} \\ i = 2: &\qquad \xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2} \\ i = 3: &\qquad \xi_2 = a_2 + \frac{1}{\xi_3} \end{aligned}$$

V prvi enačbi ξ_1 zamenjamo s formulo iz druge, ξ_2 pa s formulo iz tretje in dobimo:

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}}$$

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\xi_3}}}.$$

Postopek nadaljujemo, dokler končno ne odstranimo tudi ξ_m in dobimo:

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}}}. \tag{10}$$

Število ξ_0 smo razvili v verižni ulomek. Cela števila a_i imenujemo količniki, saj je $a_i = \left\lfloor \frac{u_i}{u_{i+1}} \right\rfloor$, za $0 \leq i \leq m$. a_0 je zdaj lahko pozitivno, enako nič ali negativno število, vendar je $a_i \geq 1$ za $1 \leq i \leq m$, saj je $u_{i+1} < u_i$. Prav tako je $a_m > 1$ za $m \geq 1$, saj je $u_{m+1} = 1$, $\xi_m = u_m = a_m$ in $u_m > u_{m+1}$.

Definicija 2.1. *Za realna števila $x_0, x_1, \ldots, x_n$ z $x_i > 0$ za $i > 0$ označimo*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}}. \tag{11}$$

V primeru, da so x_i cela števila, vsa razen morda x_0 pozitivna, ta končni verižni ulomek imenujemo preprosti.

2. Enoličnost

Racionalno število ξ_0 lahko razvijemo v verižni ulomek na vsaj dva različna načina:

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m] = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m - 1, 1]. \tag{12}$$

Ta enačba je pravilna tudi v primeru, če je ξ_0 celo število. V nadaljevanju bomo dokazali, da lahko ξ_0 razvijemo v verižni ulomek na natanko dva načina.

Lema 2.1. *Če sta dva končna verižna ulomka enaka, na primer $[a_0, a_1, \ldots, a_m] = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$, in če je $a_m > 1$ in $b_n > 1$, potem je $m = n$ in $a_i = b_i$ za $0 \leq i \leq n$.*

Dokaz. Namesto $[b_i, b_{i+1}, , \ldots, b_n]$ zapišimo y_i. Na enak način zapišimo tudi y_{i-1}:

$$y_{i-1} = [b_{i-1}, b_i, \ldots, b_n] = b_{i-1} + \frac{1}{[b_i, \ldots, b_n]} = b_{i-1} + \frac{1}{y_i}. \tag{13}$$

Vidimo, da je $y_{i-1} > b_{i-1}$ in $y_{i-1} > 1$ za $2 \leq i \leq n$ ter $y_n = b_n > 1$. Za $0 \leq i \leq n$ torej velja $b_i = \lfloor y_i \rfloor$. Izenačimo zdaj $y_0 = [b_0, \ldots, b_n]$ s $\xi_0 = [a_0, \ldots, a_m]$ in primerjajmo enačbi

(13) in (9). Najprej vidimo, da je $a_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor = \lfloor y_0 \rfloor = b_0$. Od tod sledi

$$\frac{1}{\xi_1} \overset{(9)}{=} \xi_0 - a_0 = y_0 - b_0 \overset{(13)}{=} \frac{1}{y_1},$$
$$\text{zato je } \xi_1 = y_1$$
$$\text{in posledično } a_1 = \lfloor \xi_1 \rfloor = \lfloor y_1 \rfloor = b_1.$$

Po matematični indukciji nadaljujmo s postopkom in poglejmo, kaj dobimo. Iz $\xi_{i-1} = y_{i-1}$ in $a_{i-1} = b_{i-1}$ sledi

$$\frac{1}{\xi_i} = \xi_{i-1} - a_{i-1} = y_{i-1} - b_{i-1} = \frac{1}{y_i}$$
$$\xi_i = y_i$$
$$a_i = \lfloor \xi_i \rfloor = \lfloor y_i \rfloor = b_i.$$

Zdaj moramo samo še pokazati, da morata biti m in n enaka, če hočemo, da sta tudi verižna ulomka enaka. Predpostavimo, da je $m < n$. Uporabimo indukcijo, s katero ugotovimo, da je

$$\xi_m = y_m$$
$$\xi_m = a_m = \lfloor \xi_m \rfloor = \lfloor y_m \rfloor = b_m,$$
$$\text{če povzamemo, imamo } \xi_m = b_m = y_m.$$

Vendar pa je $m < n$, zato po drugi strani velja $y_m = b_m + \frac{1}{y_{m+1}}$, kar pomeni, da je $y_m > b_m$ in pridemo do protislovja.
Na enak način predpostavimo še, da je $m > n$ in po enakem postopku ravno tako pridemo do protislovja. S tem smo dokazali, da je $m = n$. □

TRDITEV 2.2. *Vsak preprost verižni ulomek predstavlja racionalno število. Obratno, vsako racionalno število ξ_0 lahko razvijemo v končen verižni ulomek na natanko dva načina.*

DOKAZ. Vzemimo preprost verižni ulomek $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$, kjer so vsi $a_i > 0$, z izjemo morda a_0. Za večjo nazornost ga napišimo z ulomkom

$$[a_0, a_1, \ldots, a_m] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}},$$

da ga bomo lažje izračunali. Poiščimo skupni imenovalec zadnjih dveh členov:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-2} + \cfrac{1}{\frac{a_m a_{m-1} + 1}{a_m}}}}}}.$$

Na koncu smo dobili dvojni ulomek, ki ga zdaj spremenimo v enojnega:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-2} + \frac{a_m}{a_m a_{m-1} + 1}}}}}.$$

Ponovno iščemo skupni imenovalec. Postopek ponavljamo dokler ne dobimo racionalnega števila na eni sami ulomkovi črti.
Obratno: naj bo $\xi_0 = \frac{u_0}{u_1}$ racionalno število. Z Evklidovim algoritmom (8) ga razvijmo v verižni ulomek:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_1 \cdot \left\lfloor \frac{u_0}{u_1} \right\rfloor + u_2 \\
u_1 &= u_2 \cdot \left\lfloor \frac{u_1}{u_2} \right\rfloor + u_3 \\
&\vdots \\
u_m &= u_{m+1} \cdot \left\lfloor \frac{u_m}{u_{m+1}} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Nato ga zapišimo z notacijo za verižni ulomek $\xi_0 = \left[\left\lfloor \frac{u_0}{u_1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{u_1}{u_2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{u_m}{u_{m+1}} \right\rfloor\right]$, ki ga po (11) zapišemo v verižni ulomek.
V (12) smo pokazali, kako lahko še na drug način zapišemo verižni ulomek z notacijo. Zanima nas, ali je možno verižni ulomek, ki predstavlja isto racionalno število, zapisati tudi na tretji način. Vemo, da je

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \dots, a_m] \overset{(12)}{=} [a_0, a_1, \dots, a_m - 1, 1].$$

Recimo, da velja tudi

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \dots, b_n].$$

Potem imamo dve možnosti. Če je $b_n > 1$, potem po lemi 2.1 sledi, da je $b_i = a_i$ za vse $0 \leq i \leq m$. Torej sta ulomka enaka.
Če je $b_n = 1$, potem je

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, 1] \overset{(12)}{=} [b_0, b_1, \dots, b_{n-1} + 1].$$

$b_{n-1} + 1 > 1$, zato po lemi 2.1 sledi, da je $b_{n-1} + 1 = a_m$. Vidimo, da tretje možnosti ni, torej lahko racionalno število ξ_0 razvijemo v verižni ulomek na natanko dva načina. $\square$

3. Neskončni verižni ulomki

Naj bo $b_0, b_1, \dots,$ neskončen nabor takih celih števil, da je $b_i \geq 1$ za $i \geq 1$. Definirajmo cela števila h_n in k_n z enačbami:

$$\begin{aligned}
&h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1,\ h_i = b_i h_{i-1} + h_{i-2} \\
&k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0,\ k_i = b_i k_{i-1} + k_{i-2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Za $i \geq 0$ je $1 = k_0 \leq k_1 < k_2 < \dots$, zato je $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = \infty$.

LEMA 2.3. *Če je x poljubno pozitivno realno število, potem je*

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, x] = \frac{x \cdot h_{n-1} + h_{n-2}}{x \cdot k_{n-1} + k_{n-2}}.$$

DOKAZ. Dokažimo lemo z matematično indukcijo:
$n = 0$: $[x] = \frac{xh_{-1}+h_{-2}}{xk_{-1}+k_{-2}} = \frac{x\cdot 1+0}{x\cdot 0+1} = x$,
$n = 1$: $[b_0, x] = b_0 + \frac{1}{x} = \frac{x\cdot b_0+1}{x} = \frac{x\cdot h_0+h_{-1}}{x\cdot k_0+k_{-1}}$.
Privzemimo zdaj rezultat za $[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, x]$ in izračunajmo

$$\begin{aligned}
[b_0, \ldots, b_n, x] &= \left[b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{x}\right] \\
&= \frac{(b_n + \frac{1}{x})h_{n-1} + h_{n-2}}{(b_n + \frac{1}{x})k_{n-1} + k_{n-2}} \\
&= \frac{x(b_n h_{n-1} + h_{n-2}) + h_{n-1}}{x(b_n k_{n-1} + k_{n-2}) + k_{n-1}} \\
&= \frac{xh_n + h_{n-1}}{xk_n + k_{n-1}}
\end{aligned}$$

□

LEMA 2.4. *Če definiramo $z_n = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$ za $n \in \mathbb{N}_0$, potem je $z_n = \frac{h_n}{k_n}$.*

DOKAZ. Pomagamo si z lemo 2.3, kjer x zamenjamo z b_n. V računu upoštevamo tudi zvezo (14):

$$n = 0 : z_0 = [b_0] \overset{\text{lema } 2.3}{=} \frac{b_0 h_{-1} + h_{-2}}{b_0 k_{-1} + k_{-2}} \overset{(14)}{=} \frac{h_0}{k_0},$$
$$n = 1 : z_1 = [b_0, b_1] \overset{\text{lema } 2.3}{=} \frac{b_1 h_0 + h_{-1}}{b_1 k_0 + k_{-1}} \overset{(14)}{=} \frac{h_1}{k_1}.$$

Za $n \geq 2$ izračunamo

$$z_n = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n] = \frac{b_n h_{n-1} + h_{n-2}}{b_n k_{n-1} + k_{n-2}} \overset{(14)}{=} \frac{h_n}{k_n}.$$

□

LEMA 2.5. *Za $i \geq 1$ velja:*

$$h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (-1)^{i-1} \text{ in } z_i - z_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}. \tag{15}$$

Za $i \geq 2$ velja:

$$h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (-1)^i b_i \text{ in } z_i - z_{i-2} = \frac{(-1)^i b_i}{k_i k_{i-2}}. \tag{16}$$

Velja tudi, da je ulomek $\frac{h_i}{k_i}$ okrajšan.

Dokaz. Levo stran (15) preverimo z indukcijo za $i \geq -1$.

$$i=-1: \qquad h_{-1}k_{-2} - h_{-2}k_{-1} \overset{(14)}{=} 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

$$i=0: \qquad h_0k_{-1} - h_{-1}k_0 \overset{(14)}{=} (b_0h_{-1}+h_{-2})k_{-1} - 1\cdot 1 = b_0\cdot 0 - 1 = -1$$

$$i=1: \qquad h_1k_0 - h_0k_1 = (b_1h_0+h_{-1})k_0 - h_0(b_1k_0+k_{-1}) = h_{-1}k_0 - h_0k_{-1} = -(h_0k_{-1}-h_{-1}k_0) = -(-1) = 1$$

Privzemimo zdaj, da velja za $i=n$: $h_nk_{n-1} - h_{n-1}k_n = (-1)^{n-1}$. Preverimo še za $n+1$:

$$h_{n+1}k_n - h_nk_{n+1} = (b_{n+1}h_n + h_{n-1})k_n - h_n(b_{n+1}k_n + k_{n-1}) =$$

$$= h_{n-1}k_n - h_nk_{n-1} = -(h_nk_{n-1} - h_{n-1}k_n) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

Desno stran dobimo z deljenjem s k_ik_{i-1}, kjer pa je potrebna omejitev $i \geq 1$, saj je $k_{-1} = 0$.
Levo stran (16) ravno tako izračunamo z uporabo (14) in v računu upoštevamo še (15):

$$h_ik_{i-2} - h_{i-2}k_i \overset{(14)}{=} (b_ih_{i-1} + h_{i-2})k_{i-2} - h_{i-2}(b_ik_{i-1} + k_{i-2}) =$$

$$= b_i(h_{i-1}k_{i-2} - h_{i-2}k_{i-1}) \overset{(15)}{=} (-1)^ib_i$$

Desno stran drugega dela dobimo tako, da tokrat levo stran delimo s k_ik_{i-2}, zaradi česar zopet potrebujemo omejitev $i \geq 2$.
Zdaj moramo preveriti še, ali je ulomek res okrajšan. Vemo že, da ima enačba $ax+by=c$ celoštevilske rešitve natanko tedaj, ko $D(a,b)|c$. V $h_ik_{i-1} - h_{i-1}k_i$ so po (14) h_i in k_i cela števila. c je v našem primeru enak 1 oziroma -1, kar pomeni, da mora biti $D(h_n,k_n)=1$. Ulomek je res okrajšan. □

Lema 2.6. *Vrednosti z_i zadoščajo neenačbam $z_0 < z_2 < z_4 < \ldots < z_5 < z_3 < z_1$. Obstaja $\lim z_n$ in velja $z_{2i} < \lim z_n < z_{2i+1}$ za vsako nenegativno celo število i.*

Dokaz. Spomnimo se, da so k_i pozitivna za $i \geq 0$ in b_i pozitivna za $i \geq 1$. Po lemi (2.5) je $z_i - z_{i-1} > 0$, če je i liho število, torej je

$$z_{2i+1} > z_{2i} \text{ za vse } i.$$

Ker je $z_i - z_{i-2} > 0$, če je i sodo število, je

$$z_{2i} > z_{2i-2} \text{ za vse } i.$$

Podobno je $z_i - z_{i-2} < 0$, če je i liho število, torej je

$$z_{2i+1} < z_{2i-1} \text{ za vse } i.$$

Monotono naraščajoče zaporedje $z_0, z_2, z_4, \ldots$ je torej zgoraj omejeno z z_1 in ima limito $s := \lim z_i$. Podobno je monotono padajoče zaporedje $z_1, z_3, z_5, \ldots$ spodaj omejeno z z_0, torej ima tudi ta svojo limito $l := \lim z_{i-1}$. Ker je po lemi (2.5) $\lim(z_i - z_{i-1}) = s - l = 0$, ko se i povečuje v neskončnost, sta limiti podzaporedij enaki. □

Rezultati, ki smo jih videli zgoraj, nas napeljujejo k novi definiciji preprostih neskončnih verižnih ulomkov in njihovih vrednosti.

Definicija 2.2. *Naj bo* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *neskončen nabor takih celih števil, da je* $b_i \geq 1$ *za* $i \geq 1$. *Limito preprostega končnega verižnega ulomka* $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$, *ko se* n *povečuje v neskončnost, imenujemo* preprost neskončen verižni ulomek *in ga označimo* $[b_0, b_1, \ldots]$. *Potemtakem imamo* $[b_0, b_1, b_2, \ldots] = \lim_{n\to\infty}[b_0, b_1, \ldots, b_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{k_n} = \lim_{n\to\infty} z_n$, *kjer so* h_n, k_n *in* z_n *definirane kot v (14) in lemi (2.4). Racionalno število* $\frac{h_n}{k_n} = z_n = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$ *imenujemo* n-ti konvergent *neskončnega verižnega ulomka.*

Trditev 2.7. *Vsak neskončen preprost verižni ulomek* $[b_0, b_1, \ldots]$ *je iracionalno število.*

Dokaz. Označimo $[b_0, b_1, \ldots] = \theta$. Iz leme 2.6 vidimo, da θ leži med zaporednima konvergentoma z_n in z_{n+1}, torej je $|\theta - z_n| < |z_{n+1} - z_n|$. Po lemi 2.5 in prvi neenačbi velja: $0 < |k_n\theta - h_n| = k_n|\theta - z_n| < k_n|z_{n+1} - z_n| = k_n\frac{1}{k_n k_{n+1}} = \frac{1}{k_{n+1}}$; tu smo uporabili dejstvo, da je k_n pozitivno celo število. Ker k_n narašča z n, lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo neskončno mnogo takih parov h, k, da je $0 < |k\theta - h| < \epsilon$. Po trditvi 1.3 je θ iracionalno število. □

Če hočemo pokazati še, da dva različna neskončna verižna ulomka ne moreta imeti enake vrednosti, potrebujemo še naslednji lemi:

Lema 2.8. *Naj bo* $\theta = [b_0, b_1, \ldots]$. *Potem je* $b_0 = \lfloor \theta \rfloor$.

Dokaz. Po lemi 2.6 velja $z_0 < \theta < z_1$, kar je isto kot $b_0 < \theta < b_0 + \frac{1}{b_1}$. $b_1 \geq 1$, zato je $b_0 < \theta < b_0 + 1$. Ti neenačbi dokazujeta našo lemo. □

Lema 2.9. *S* θ *kot v prejšnji lemi in* $\theta_1 = [b_1, b_2, \ldots]$ *imamo* $\theta = b_0 + \frac{1}{\theta_1}$.

Dokaz. Opazimo, da je po trditvi 2.7 $\theta_1 \neq 0$. Zdaj lahko zapišemo $\theta = \lim_{n\to\infty}[b_0, b_1, \ldots, b_n] = \lim_{n\to\infty}\left\{b_0 + \frac{1}{[b_1, b_2, \ldots, b_n]}\right\} = b_0 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty}[b_1, \ldots, b_n]} = b_0 + \frac{1}{\theta_1}$. □

Trditev 2.10. *Dva različna neskončna verižna ulomka predstavljata različni iracionalni števili.*

Dokaz. Predpostavimo, da $[b_0, b_1, \ldots] = [a_0, a_1, \ldots] = \theta$. Po lemi 2.8 je $\lfloor \theta \rfloor = b_0 = a_0$. Označimo $\theta_1 = [b_1, b_2, \ldots]$ in $\theta_1' = [a_1, a_2, \ldots]$. Po lemi 2.9 je $\theta = b_0 + \frac{1}{\theta_1} = a_0 + \frac{1}{\theta_1'}$. Od tod sledi, da je $\theta_1 = \theta_1'$ in $\lfloor \theta_1 \rfloor = b_1 = a_1 = \lfloor \theta_1' \rfloor$. Postopek ponavljamo in vidimo, da je $a_n = b_n$ za vse n. □

4. Razvoj v neskončni verižni ulomek

Tudi obrat trditve 2.7, vsako iracionalno število lahko razvijemo v neskončen preprost verižni ulomek, drži. Za dokaz te trditve naj bo ξ_0 neko iracionalno število. Definirajmo nabor celih števil $a_0, a_1, \dots$ in nabor iracionalnih števil $\xi_1, \xi_2, \dots$ z enačbami:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lfloor \xi_0 \rfloor; \qquad \xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - a_0} \\ a_1 &= \lfloor \xi_1 \rfloor; \qquad \xi_2 = \frac{1}{\xi_1 - a_1} \\ &\vdots \\ a_i &= \lfloor \xi_i \rfloor; \qquad \xi_{i+1} = \frac{1}{\xi_i - a_i} \end{aligned} \tag{17}$$

Zveza $\xi_{i-1} - a_{i-1} = \xi_{i-1} - \lfloor \xi_{i-1} \rfloor$ skupaj z dejstvom, da je ξ_{i-1} iracionalno število, jasno kaže, da je $0 < \xi_{i-1} - a_{i-1} < 1$. Zato je $\xi_i = (\xi_{i-1} - a_{i-1})^{-1} > 1$ in $a_i = \lfloor \xi_i \rfloor \geq 1$ za vse $i \geq 1$. Če na $\xi_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{\xi_i}$ uporabimo zgornje enačbe, dobimo $\xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}} = [a_0, a_1, \xi_2]$. Postopek nadaljujemo po matematični indukciji in dobimo $\xi_0 = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \xi_n]$. Uporabimo lemo 2.3:

$$\xi_0 = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \xi_n] = \frac{\xi_n h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n k_{n-1} + k_{n-2}}. \tag{18}$$

Vrednosti h_i in k_i zadoščajo rekurzivni zvezi

$$\begin{aligned} h_i &= a_i h_{i-1} + h_{i-2} \\ k_i &= a_i k_{i-1} + k_{i-2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Uporabimo zdaj lemo 2.5

$$\begin{aligned} \xi_0 - z_{n-1} = \xi_0 - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}} &\overset{(18)}{=} \frac{\xi_n h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n k_{n-1} + k_{n-2}} - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}} \\ &= \frac{-(h_{n-1} k_{n-2} - h_{n-2} k_{n-1})}{k_{n-1}(\xi_n k_{n-1} + k_{n-2})} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{k_{n-1}(\xi_n k_{n-1} + k_{n-2})}. \end{aligned} \tag{20}$$

Vidimo, da je razlika $\xi_0 - z_{n-1}$ pozitivna za lihe vrednosti n in negativna za sode. To pomeni

$$z_{2n} = \frac{h_{2n}}{k_{2n}} < \xi_0 < \frac{h_{2n-1}}{k_{2n-1}} = z_{2n-1}. \tag{21}$$

Iz neenakosti (21) in konvergence zaporedja (z_n) sledi, da je $\xi_0 = \lim_{n \to \infty} z_n = [a_0, a_1, \dots]$, tako da zgoraj zapisane enačbe določajo algoritem za razvoj iracionalnega števila ξ_0 v neskončen verižni ulomek. Enoličnost smo že dokazali v trditvi 2.10, zato povzemimo vse skupaj v izreku.

Izrek 2.11. *Vsako iracionalno število ξ_0 lahko enolično predstavimo kot preprost neskončen verižni ulomek $[a_0, a_1, \dots]$ in obratno. Cela števila a_i so pozitivna za $i \geq 1$. n-ti konvergent $\frac{h_n}{k_n}$ je končen verižni ulomek $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Imenovalci k_n tvorijo monotono naraščajoče zaporedje celih števil za $n \geq 1$. Sodi konvergenti $\frac{h_{2i}}{k_{2i}}$ za $i = 0, 1, \dots$ so monotono naraščajoči z limito ξ_0, lihi pa monotono padajoči z limito ξ_0.*

5. Konvergenti kot aproksimacije

Naj bo $\xi = [a_0, a_1, \dots]$ in $z_n = \frac{h_n}{k_n}$ njegov n-ti konvergent.

LEMA 2.12. *Za vsak $n \geq 0$ velja* $\left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right| < \frac{1}{k_n k_{n+1}}$.

DOKAZ. Začnimo z (20), ocenimo z upoštevanjem (17) in uporabimo rekurzivno zvezo (19) za k_i:

$$\left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right| \overset{(20)}{=} \left|\frac{(-1)^n}{k_n(\xi_{n+1}k_n + k_{n-1})}\right| \overset{(17)}{<}$$
$$< \frac{1}{k_n(a_{n+1}k_n + k_{n-1})} \overset{(19)}{=} \frac{1}{k_n k_{n+1}}.$$

□

TRDITEV 2.13. *Konvergenti $\frac{h_n}{k_n}$ verižnega ulomka iracionalnega števila ξ za $n \geq 1$ zadoščajo $\left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right| < \left|\xi - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}\right|$ in $|\xi k_n - h_n| < |\xi k_{n-1} - h_{n-1}|$.*

DOKAZ. Dokažimo drugo neenačbo iz katere neposredno sledi prva, saj pozitivni celoštevilski k_n naraščajo z n z izjemo $k_0 = k_1$. Podobno kot zgoraj začnimo z (20). Z upoštevanjem (17) ocenimo, da je

$$a_n + 1 > \xi_n. \tag{22}$$

$$\left|\xi - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}\right| \overset{(20)}{=} \frac{1}{k_{n-1}(\xi_n k_{n-1} + k_{n-2})}. \tag{23}$$

Imenovalec lahko s pomočjo (22) ocenimo

$$\begin{aligned} \xi_n k_{n-1} + k_{n-2} &< (a_n + 1)k_{n-1} + k_{n-2} \\ &= a_n k_{n-1} + k_{n-1} + k_{n-2} \\ &= k_n + k_{n-1} \overset{1 \leq a_i}{\leq} a_{n+1}k_n + k_{n-1} = k_{n+1}, \end{aligned} \tag{24}$$

ter uporabimo v (23):

$$\left|\xi - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}\right| \overset{(20)}{=} \frac{1}{k_{n-1}(\xi_n k_{n-1} + k_{n-2})} \overset{(24)}{>} \frac{1}{k_{n-1}k_{n+1}}.$$

Če to neenakost pomnožimo s k_{n-1}, dobimo

$$|\xi k_{n-1} - h_{n-1}| > \frac{1}{k_{n+1}}.$$

Po drugi strani je po lemi 2.12 $\left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right| < \frac{1}{k_n k_{n+1}}$. Če torej pomnožimo še to neenakost s k_n, je to

$$|\xi k_n - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}}.$$

Dobro poglejmo rezultate, ki nam pravijo, da je

$$|\xi k_n - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}} < |\xi k_{n-1} + h_{n-1}|$$

in trditev je s tem dokazana. □

Konvergenti $\frac{h_n}{k_n}$ so najboljši približki iracionalnemu številu ξ v tem smislu.

Trditev 2.14. *Če za racionalno število $\frac{a}{b}$ z $b > 0$ velja $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right|$ za nek $n > 0$, potem je $b > k_n$.*
Če za racionalno število $\frac{a}{b}$ z $b > 0$ velja $|\xi b - a| < |\xi k_n - h_n|$ za nek $n > 0$, potem je $b > k_n$.

Dokaz. Kot bomo videli spodaj, druga trditev vsebuje prvo. Dokažimo najprej drugo trditev s protislovjem. Predpostavimo, da je $|\xi b - a| < |\xi k_n - h_n|$ in $b \leq k_n$. Od tod je $b < k_{n+1}$, saj $n > 0$. Obstajata taki celi števili x in y, da velja $b = xk_n + yk_{n+1}$ in $a = xh_n + yh_{n+1}$:

$$\begin{pmatrix} h_n & h_{n+1} \\ k_n & k_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

saj je po lemi 2.5 je determinanta zgornje 2×2 matrike enaka $h_n k_{n+1} - k_n h_{n+1} = \pm 1$. Pokažimo, da niti x niti y ni enak 0.
Poglejmo najprej primer, če je $y = 0$. Potem sta $a = xh_n$ in $b = xk_n$, ter $x \neq 0$ in $|b\xi - a| = |x| \cdot |k_n\xi - h_n| \geq |k_n\xi - h_n|$. Rezultat je protisloven s predpostavko.
Kaj pa, če je $x = 0$? V tem primeru je $y \neq 0$ in $b = yk_{n+1}$, kar pa je v protislovju z $b < k_{n+1}$.
Ugotovili smo, da x in y ne moreta biti enaka 0. Pokažimo še, da imata x in y nasprotni predznak.
Če je $y < 0$, potem iz enačbe $xk_n = b - yk_{n+1}$ sledi, da je $x > 0$.
Če je $y > 0$, potem $b < yk_{n+1}$, saj vemo, da $b < k_{n+1}$ in je y pozitivno celo število. Iz tega sledi, da je $xk_n < 0$ in $x < 0$. Po (21) imata $k_n\xi - h_n$ in $k_{n+1}\xi - h_{n+1}$ nasprotna predznaka, torej imata $x(k_n\xi - h_n)$ in $y(k_{n+1}\xi - h_{n+1})$ isti predznak. Ravno tako vidimo, da velja

$$b\xi - a = (xk_n + yk_{n+1})\xi - (xh_n + yh_{n+1}) = x(k_n\xi - h_n) + y(k_{n+1}\xi - h_{n+1}).$$

Izračunajmo absolutno vrednost te enačbe in jo ocenimo:

$$|b\xi - a| = |x(k_n\xi - h_n)| + |y(k_{n+1}\xi - h_{n+1})| > |x(k_n\xi - h_n)| \geq |k_n\xi - h_n|.$$

Dobimo protislovje in trditev je s tem dokazana.
Zdaj pa dokažimo še prvi del trditve. Predpostavimo, da je $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right|$ in $b \leq k_n$. Ker so vsa števila pozitivna, lahko ti neenačbi pomnožimo in dobimo $|b\xi - a| < |\xi k_n - h_n|$. Po drugem delu trditve od tod sledi, da je $b > k_n$, kar pa je protislovje z našo predpostavko. □

Predpostavka $n > 0$ je v trditvi potrebna. Poglejmo primer, ko je $\xi = \sqrt{3}$, $a = 2$, in $b = 1$. Potem je $\frac{h_0}{k_0} = 1$ in $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| = |\sqrt{3} - 2| < |\sqrt{3} - 1| = \left|\xi - \frac{h_0}{k_0}\right|$, medtem ko je $b = 1 = k_0$.

6. Periodični verižni ulomki

Definicija 2.3. *Neskončen verižni ulomek* $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$ *je* periodičen, če obstajata taki celi števili n in s, da je $a_r = a_{n+r}$ za vse $r > s$.

Definicija 2.4. *Iracionalno število, ki je rešitev kvadratne enačbe s celimi koeficienti imenujemo* kvadratno iracionalno *število.*
Njegovo konjugirano *število je drugi koren te enačbe.*

Ulomek $[2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots]$ je na primer periodičen. Da ocenimo tak verižni ulomek, pišimo θ za tisti del ulomka, ki je strogo periodičen. Na primer: $\theta = [4, 5, 4, 5, \ldots] = [4, 5, \theta]$. Od tod je

$$\begin{aligned}
\theta &= 4 + (5 + \theta^{-1})^{-1} \\
&= 4 + \frac{\theta}{5\theta + 1} \\
\theta &= \frac{21\theta + 4}{5\theta + 1} \\
0 &= 5\theta^2 - 20\theta - 4 \\
\theta &= \frac{20 + \sqrt{480}}{10} \\
\theta &= \frac{10 + 2\sqrt{30}}{5}
\end{aligned}$$

Potem je prvotni ulomek enak $[2, 3, 4, 5, 4, 5, \ldots] = [2, 3, \theta] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\theta}} = \frac{7\theta + 2}{3\theta + 1}$ in je, kot bomo spodaj premislili, kvadratno iracionalno število.
Drug primer je $\alpha = [1, 1, 1, 1, \ldots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vrednost najdemo na podoben način kot zgoraj: periodični del označimo z α: $\alpha = [1, 1, \ldots]$, celoten ulomek je torej enak $\alpha = [1, \alpha] = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Rešimo enačbo. Najprej dobimo kvadratno enačbo: $\alpha^2 = \alpha + 1$. Z diskriminanto poiščemo rešitve te kvadratne enačbe, in sicer $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Korena te enačbe pa sta $x_{1,2} = \frac{(-1)^2 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Za rešitev vzamemo pozitivni koren.

Kot bomo zdaj pokazali s posplošitvijo zgornjih argumentov, je vsak periodičen verižni ulomek kvadraten. Naj bo $\xi = [b_0, b_1, \ldots, b_s, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots]$ in $\theta = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \theta]$. Po (18) je $\theta = \frac{\theta h_{n-1} + h_{n-2}}{\theta k_{n-1} + k_{n-2}}$. Na ta način θ zadošča kvadratni enačbi s celimi koeficienti, tako da je θ racionalno ali kvadratno iracionalno število. Toda ker je θ neskončen verižni ulomek, je zato iracionalno, torej kvadratno iracionalno.

$$\theta = \frac{a + \sqrt{D}}{b}$$

Da se vrnemo h ξ, imamo $\xi = [b_0, b_1, \ldots, b_s, \theta] = \frac{p\theta+p'}{q\theta+q'}$, kjer sta $\frac{p}{q}$ in $\frac{p'}{q'}$ zadnja dva konvergenta $[b_0, \ldots, b_s]$. Tu se pojavi težava, saj odstranitev imenovalca iz enačbe ne da direktno kvadratne enačbe, kot se nam je zgodilo pri strogo periodičnem verižnem ulomku. Torej poskusimo drugače. Namesto odstranitve ulomka, bomo le-tega raje racionalizirali in pri tem uporabili $\theta^* = \frac{a-\sqrt{D}}{b}$

$$\begin{aligned}\xi =& \frac{p\theta + p'}{q\theta + q'}\\ \xi =& \frac{p\theta + p'}{q\theta + q'} \cdot \frac{q\theta^* + q'}{q\theta^* + q'}\\ \xi =& \frac{pq\theta\theta^* + pq'\theta + p'q\theta^* + p'q'}{q^2\theta\theta^* + qq'(\theta + \theta^*) + q'^2}\end{aligned}$$

V imenovalcu dobimo sama racionalna števila, v števcu pa sta $pq\theta\theta^*$ in $p'q'$ racionalni števili, $pq'\theta$ in $p'q\theta^*$ pa sta oblike $\mathbb{Q} \cdot \sqrt{D}$. Dobimo torej ξ oblike

$$\xi = \frac{\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{D}}{\mathbb{Q}}.$$

Oziroma ga lahko zapišemo tudi

$$\xi = \frac{a' + \sqrt{D'}}{b'}.$$

Zapisan v taki obliki pa pomeni, da je tudi ξ koren kvadratne enačbe s celimi koeficienti. Ponovno lahko razpravljamo ali je ξ racionalno ali kvadratno iracionalno število in je prejšnje izločeno, ker je ξ neskončen verižni ulomek. S tem smo dokazali prvi del sledečega rezultata.

Trditev 2.15. *Vsak periodični verižni ulomek je kvadratno iracionalno število in obratno.*

Dokaz. Prvi del dokaza smo torej že naredili. Osredotočimo se na kvadratno iracionalno število $\xi = \xi_0 = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$. Tu je $b > 0$ celo število in ni popoln kvadrat. Celi števili a in c sta lahko pozitivni ali negativni, tako da imamo popolnoma splošno obliko ξ_0. V tem primeru lahko ξ_0 zapišemo na dva načina:

$$\xi_0 = \frac{ac + \sqrt{bc^2}}{c^2}, \quad \text{če } c > 0$$

ali

$$\xi_0 = \frac{-ac + \sqrt{bc^2}}{-c^2}, \quad \text{če } c < 0.$$

Opazimo, da c^2 deli $bc^2 - (ac)^2$ in zato lahko zapišemo $\xi_0 = \frac{P_0+\sqrt{D}}{Q_0}$ za $Q_0|(D - P_0^2)$, kjer so P_0, Q_0 in D cela števila, $D > 0$ in D ni popoln kvadrat.
Dokažimo zdaj, da je $[a_0, a_1, \ldots]$ razvoj v neskončni verižni ulomek iracionalnega števila

ξ_0, kjer so a_i definirane z naslednjimi rekurzivnimi zvezami:

$$\begin{aligned} a_i &= \lfloor \xi_i \rfloor \\ \xi_i &= \frac{P_i + \sqrt{D}}{Q_i} \\ P_{i+1} &= a_i Q_i - P_i \\ Q_{i+1} &= \frac{D - P_{i+1}^2}{Q_i} \end{aligned} \tag{25}$$

Najprej opazimo, da sta P_i in Q_i celi števili za vse $i \geq 0$. Dokažimo to z matematično indukcijo. Predpostavimo, da sta P_i in Q_i taki celi števili, da $Q_i | (D - P_i^2)$. Potem je P_{i+1} celo število in iz enačbe

$$Q_{i+1} = \frac{D - P_{i+1}^2}{Q_i} = \frac{D - P_i^2 + 2a_i Q_i P_i - a_i^2 Q_i^2}{Q_i}$$

vidimo, da je tudi Q_{i+1} celo število. Poleg tega velja še

$$Q_i = \frac{D - P_{i+1}^2}{Q_{i+1}},$$

torej $Q_{i+1} | (D - P_{i+1}^2)$ in indukcija je končana. Nato opazimo še

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{P_i + \sqrt{D}}{Q_i} \\ &= \frac{a_i Q_i - P_{i+1} + \sqrt{D}}{Q_i} \\ &= a_i + \frac{\sqrt{D} - P_{i+1}}{Q_i} \\ &= a_i + \frac{D - P_{i+1}^2}{Q_i(\sqrt{D} + P_{i+1})} \\ &= a_i + \frac{1}{\frac{\sqrt{D} + P_{i+1}}{Q_{i+1}}} \\ &= a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}. \end{aligned}$$

Ta enačba skupaj z $a_i = \lfloor \xi_i \rfloor$ po (17) dokazuje, da je

$$\xi_0 = [a_0, a_1, \ldots] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \xi_n].$$

S ξ_0^* in ξ_n^* označimo konjugirane pare ξ_0 in ξ_n. Trdimo, da je

$$\xi_0^* = \frac{\xi_n^* h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n^* k_{n-1} + k_{n-2}},$$

in še vedno veljata zvezi

$$\begin{aligned} h_i &= a_i h_{i-1} + h_{i-2} \\ k_i &= a_i k_{i-1} + k_{i-2}. \end{aligned}$$

Poglejmo, če to res drži:

$$\xi_0 \overset{(18)}{=} \frac{\xi_n h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n k_{n-1} + k_{n-2}}.$$

Iz te enakosti lahko izrazimo ξ_n in ga primerjamo s ξ_n^*. Torej

$$\begin{aligned}
\xi_0 \xi_n k_{n-1} + \xi_0 k_{n-2} =& \xi_n h_{n-1} + h_{n-2} \\
\xi_n \cdot (\xi_0 k_{n-1} - h_{n-1}) =& h_{n-2} - \xi_0 k_{n-2} \\
\xi_n =& -\frac{\xi_0 k_{n-2} - h_{n-2}}{\xi_0 k_{n-1} - h_{n-1}} \\
\xi_n =& -\frac{\frac{P_0+\sqrt{D}}{Q_0} k_{n-2} - h_{n-2}}{\frac{P_0+\sqrt{D}}{Q_0} k_{n-1} - h_{n-1}} \\
\xi_n =& -\frac{Q_0 h_{n-2} - P_0 k_{n-2} - \sqrt{D} k_{n-2}}{Q_0 h_{n-1} - P_0 k_{n-1} - \sqrt{D} k_{n-1}}
\end{aligned}$$

Zdaj pa napišimo še ξ_n^*:

$$\begin{aligned}
\xi_0^* =& \frac{\xi_n^* h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n^* k_{n-1} + k_{n-2}} \\
\xi_0^* \xi_n^* k_{n-1} + \xi_0^* k_{n-2} =& \xi_n^* h_{n-1} + h_{n-2} \\
\xi_n^* \cdot (\xi_0^* k_{n-1} - h_{n-1}) =& h_{n-2} - \xi_0^* k_{n-2} \\
\xi_n^* =& -\frac{\xi_0^* k_{n-2} - h_{n-2}}{\xi_0^* k_{n-1} - h_{n-1}} \\
\xi_n^* =& -\frac{\frac{P_0-\sqrt{D}}{Q_0} k_{n-2} - h_{n-2}}{\frac{P_0-\sqrt{D}}{Q_0} k_{n-1} - h_{n-1}} \\
\xi_n^* =& -\frac{Q_0 h_{n-2} - P_0 k_{n-2} + \sqrt{D} k_{n-2}}{Q_0 h_{n-1} - P_0 k_{n-1} + \sqrt{D} k_{n-1}}
\end{aligned}$$

Vidimo, da se ξ_n^* razlikuje od ξ_n le v predznaku pri $\sqrt{D}$, torej je res konjugiran h ξ_n in zgornja trditev drži.

Rešimo enačbo za ξ_n^*. Zgoraj smo že izračunali:

$$\begin{aligned}
\xi_n^* &= -\frac{h_{n-2} - \xi_0^* k_{n-2}}{h_{n-1} - \xi_0^* k_{n-1}} \\
\xi_n^* &= -\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \left(\frac{\xi_0^* - \frac{h_{n-2}}{k_{n-2}}}{\xi_0^* - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}}} \right).
\end{aligned}$$

Zdaj upoštevamo, da je $\lim \frac{h_n}{k_n} = \xi_0$. Izraz v oklepaju konvergira k 1, ko se n povečuje v neskončnost. Za dovolj velike n, na primer $n \geq N$, je izraz v oklepaju pozitiven in ξ_n^* negativen.

Vendar je $\xi_n > 0$ za $n > 0$, zato $\xi_n - \xi_n^* > 0$ za $n \geq N$. Po (25) to pomeni, da je $\frac{2\sqrt{D}}{Q_n} > 0$ in zato $Q_n > 0$ za $n \geq N$. Poleg tega imamo po (25) $Q_n Q_{n+1} + P_{n+1}^2 = D$. Od tod za $n \geq N$ ocenimo in ugotovimo, da je $Q_n < D$, ravno tako z ocenitvijo pridemo do spoznanja, da

je $P_{n+1}^2 < D$, torej $|P_{n+1}| < \sqrt{D}$.
Q_n leži na intervalu $(0, D)$, P_n pa na $(-\sqrt{D}, \sqrt{D})$ zato je različnih celih števil P_n in Q_n, ki ustrezajo tem pogojem, le končno mnogo. Koeficienti se zato morajo začeti ponavljati. Dobili smo periodični verižni ulomek.

$\square$

POGLAVJE 3

Dodatni Diofantski približki

1. Osnovni izsledek

V tem poglavju se bomo posvetili izboljšanju trditve 1.1. V zadnjem delu pa se bomo ukvarjali z razdelitvijo ulomljenih delov pozitivnih celoštevilskih produktov iracionalnih števil.

TRDITEV 3.1. *Za vsako iracionalno število ξ obstaja neskončno mnogo takih racionalnih števil $\frac{h}{k}$, da velja $\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$.*

DOKAZ. Za dokaz te trditve uporabimo razvoj v verižni ulomek $\xi = [a_0, a_1, \ldots]$ in njegov konvergent $\frac{h_n}{k_n}$. Dokaz temelji na katerihkoli treh (razen prvih treh) zaporednih konvergentih. Pokazali bomo, da vsaj eden od teh zadošča neenačbi v trditvi.
Pišimo c_{n+1} za $\frac{k_{n-1}}{k_n}$ in po (20):

$$
\begin{aligned}
\left|\xi - \frac{h_n}{k_n}\right| &\overset{(18)}{=} \left|\frac{\xi_{n+1}h_n + h_{n-1}}{\xi_{n+1}k_n + k_{n-1}} - \frac{h_n}{k_n}\right| \\
&= \left|\frac{h_{n-1}k_n - h_nk_{n-1}}{k_n(\xi_{n+1}k_n + k_{n-1})}\right| \\
&\overset{2.5}{=} \frac{|(-1)^{n-1}|}{k_n(\xi_{n+1}k_n + k_{n-1})} \\
&= \frac{1}{k_n(\xi_{n+1}k_n + k_{n-1})} \\
&= \frac{1}{k_n^2(\xi_{n+1} + \frac{k_{n-1}}{k_n})} \\
&= \frac{1}{k_n^2(\xi_{n+1} + c_{n+1})}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Primerjati želimo torej $\sqrt{5}$ in $\xi_{n+1} + c_{n+1}$.
Predpostavimo, da je $\xi_i + c_i \leq \sqrt{5}$ za tri zaporedne vrednosti i; namreč $i = n-1, n, n+1$. Pričakujemo, da bomo dobili protislovje in s tem dokazali trditev.
Po (19) je

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_i} &= \frac{k_{i-1}}{k_{i-2}} = \frac{a_{i-1}k_{i-2} + k_{i-3}}{k_{i-2}} = \\
&= a_{i-1} + \frac{k_{i-3}}{k_{i-2}} = a_{i-1} + c_{i-1}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Podobno zvezo smo že videli v (17):

$$\xi_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}.$$

V (27) uporabimo $i = n$ odštejemo enačbi in dobimo:

$$\frac{1}{c_n} + \frac{1}{\xi_n} = c_{n-1} + \xi_{n-1}.$$

Po predpostavki je $c_n + \xi_n \leq \sqrt{5}$, torej $\xi_n \leq \sqrt{5} - c_n$. Ker pa smo zgoraj videli, da je $\frac{1}{c_n} + \frac{1}{\xi_n} = c_{n-1} + \xi_{n-1}$, iz predpostavke sledi, da je tudi $\frac{1}{\xi_n} \leq \sqrt{5} - \frac{1}{c_n}$. Ker $\xi_n > 0$, lahko ti dve neenačbi pomnožimo na obeh straneh:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} - \frac{1}{c_n} \geq & \frac{1}{\xi_n} \quad / \cdot \left(\sqrt{5} - c_n\right) \\ \left(\sqrt{5} - \frac{1}{c_n}\right)\left(\sqrt{5} - c_n\right) \geq & \frac{1}{\xi_n}\left(\sqrt{5} - c_n\right) \overset{\text{po predpostavki}}{\geq} \frac{1}{\xi_n} \cdot \xi_n = 1 \end{aligned}$$

Ker $c_n > 0$, lahko enačbo pomnožimo:

$$\begin{aligned} 5 - \sqrt{5}c_n - \sqrt{5}\frac{1}{c_n} + 1 \geq & 1 \quad / \cdot \frac{c_n}{\sqrt{5}} \\ c_n^2 + 1 \leq & \sqrt{5}c_n \\ c_n^2 - \sqrt{5}c_n + 1 \leq & 0 \end{aligned}$$

Zanima nas katere vrednosti c_n zadoščajo zgornji neenakosti, zato jo dopolnimo do popolnega kvadrata. Pri tem lahko enačaj izpustimo, ker je c_n racionalno število.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - c_n\right)^2 - \frac{1}{4} < & 0 \\ \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - c_n\right)^2 < & \frac{1}{4} \\ \left|\frac{\sqrt{5}}{2} - c_n\right| < & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < c_n < & \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{aligned}$$

Po izreku 2.11 je $c_n < 1$, saj imenovalci k_n tvorijo monotono naraščajoče zaporedje. Zanimivi del zgornje neenakosti je torej $c_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ta rezultat smo dobili z uporabo $i = n-1, n$. Če isto naredimo še za $i = n, n+1$, ugotovimo, da je tudi $c_{n+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Za nadaljnje računanje rabimo tudi obratno vrednost te ocene:

$$\frac{1}{c_{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Ko to racionaliziramo, dobimo
$$\frac{1}{c_{n+1}} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$
Zdaj te rezultate uporabimo v zvezi (27) in dobimo
$$a_n = \frac{1}{c_{n+1}} - c_n < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = 1,$$
kar pa je v protislovju z izrekom 2.11, ki pravi, da so vsi a_i pozitivna cela števila za $i \geq 1$. □

2. Najboljši možni približki

V tem razdelku si bomo pogledali, ali je $\sqrt{5}$ iz trditve 3.1 najboljša možna konstanta.

Trditev 3.2. *Konstante $\sqrt{5}$ v trditvi 3.1 ne moremo zamenjati z večjo vrednostjo.*

Dokaz. Za dokaz te trditve bomo uporabili $\xi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Predpostavimo, da imamo neskončno mnogo ulomkov $\frac{h}{k}$, za katere velja $\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{ck^2}$, kjer je c neka konstanta, ki je večja od $\sqrt{5}$.
Definirajmo x kot funkcijo h in k z enačbo:
$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{h}{k} = \frac{1}{xk^2},$$
tako, da $|x| > c > \sqrt{5}$. Potem lahko zapišemo
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{h}{k} &= \frac{1}{xk^2} \quad / \cdot k \\
\frac{\sqrt{5}k}{2} + \frac{k}{2} - h &= \frac{1}{xk} \\
\frac{1}{xk} - \frac{\sqrt{5}k}{2} &= \frac{k}{2} - h \quad /()^2 \\
\frac{1}{x^2k^2} - \frac{\sqrt{5}}{x} + \frac{5k^2}{4} &= \frac{k^2}{4} - kh + h^2 \\
\frac{1}{x^2k^2} - \frac{\sqrt{5}}{x} &= h^2 - kh - k^2
\end{aligned}$$
Poglejmo, kaj smo dobili. Na desni strani imamo celo število, zato mora biti tudi na levi strani število celo. Če pogledamo absolutno vrednost leve strani, vidimo:
$$\left|\frac{1}{x^2k^2} - \frac{\sqrt{5}}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2k^2}\right| + \left|\frac{\sqrt{5}}{x}\right| < \frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{5}}{c}.$$
Po predpostavki je $\frac{\sqrt{5}}{c} < 1$, zato lahko izberemo k zadosti velik, da $\frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{5}}{c} < 1$. Ker je $\frac{1}{k^2} + \frac{\sqrt{5}}{c} = h^2 - hk - k^2$ in je slednje celo število, potem velja, da je $h^2 - hk - k^2 = 0$, kar pomeni, da je $h^2 = kh + k^2$. Če upoštevamo, da je ulomek $\frac{h}{k}$ okrajšan ugotovimo, da je

zgornja enačba nemogoča, saj bi pomenila, da vsako praštevilo, ki deli k, deli tudi h. To pa vemo, da ne drži, če sta si števili h in k tuji. Prišli smo do protislovja, torej je $\sqrt{5}$ res največja vrednost, za katero trditev 3.1 drži. $\square$

3. Enakomerne porazdelitve

Naj bo S nabor števil oziroma točk $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ v enotskem intervalu, torej je $0 \leq \alpha_i \leq 1$ za vse i. Naj bo I nek podinterval enotskega intervala.

Definicija 3.1. *Za vsako naravno število n naj $n(I)$ označuje število točk $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ α_n, ki ležijo v intervalu I.*
Nabor S je enakomerno porazdeljen *po modulu celih števil, če za vsak podinterval I velja $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(I)}{n} = \ell(I)$, kjer $\ell(I)$ označuje dolžino intervala I.*

Opomba: ker je dolžina celotnega intervala $[0,1]$ enaka 1 in je $n([0,1]) = n$, zgornja enakost drži za $I = [0,1]$.
Naj bo R neko zaporedje realnih števil $\beta_1, \beta_2, \ldots$.

Definicija 3.2. *Zapis $(\beta) = \beta - \lfloor \beta \rfloor$ označuje* decimalni del β*.*
Zaporedje R je enakomerno celoštevilsko porazdeljeno*, če je zaporedje $(\beta_1), (\beta_2), \ldots$ enakomerno porazdeljeno po modulu celih števil.*

Trditev 3.3. *Če je ξ iracionalno število, potem je zaporedje $\xi, 2\xi, 3\xi, \ldots$ porazdeljeno enakomerno po modulu celih števil.*

Ker v primeru, da je ξ racionalno število, zaključek ni pravilen, bi trditev lahko bila potreben in zadosten pogoj za iracionalnost. Najprej dokažimo trditev z verižnimi ulomki.

Dokaz trditve 3.3. Naj bo dan $\epsilon > 0$ in I nek podinterval enotskega intervala. Potem je

$$\ell(I) \leq 1.$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ naj $n(I)$ označuje število točk $(\xi), (2\xi), (3\xi), \ldots, (n\xi)$, ki ležijo v I. Radi bi dokazali, da je

$$\left| \frac{n(I)}{n} - \ell(I) \right| < \epsilon \tag{28}$$

za vse dovolj velike n.
Naj bodo $\frac{h_0}{k_0}, \frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \ldots$ konvergenti razvoja v verižni ulomek iracionalnega števila ξ. Po izreku 2.11 so k_i naravna naraščajoča števila, zato je tudi $k_i\sqrt{k_{i-1}}$ naraščajoče zaporedje:

$$\frac{k_{i+1}\sqrt{k_i}}{k_i\sqrt{k_{i-1}}} = \frac{k_{i+1}}{\sqrt{k_i k_{i-1}}} > 1$$

in

$$\lim_{i\to\infty} k_i\sqrt{k_{i-1}} = \infty.$$

Za izbran n zato obstaja (natanko določen) i, da velja

$$k_i\sqrt{k_{i-1}} \le n < k_{i+1}\sqrt{k_i}. \tag{29}$$

V tej zvezi je i podan kot funkcija n. Ko n raste v neskončnost, se v neskončnost povečujeta tudi i in k_i.
Zvezo (28) bomo dokazali za vse dovolj velike n in ustrezne vrednosti i, ki zadoščajo

$$\frac{1}{\sqrt{k_{i-1}}} < \frac{\epsilon}{8} \quad \text{in} \quad \frac{2}{\sqrt{k_i}} < \ell(I). \tag{30}$$

Namesto s ξ se bomo v dokazu ukvarjali s konvergenti $\frac{h_i}{k_i}$. Za to definirajmo J, podinterval podintervala I, tako, da podinterval I na vsakem koncu skrajšamo za $\frac{1}{\sqrt{k_i}}$. Enačba za dolžino podintervala J je torej

$$\ell(J) = \ell(I) - \frac{2}{\sqrt{k_i}}. \tag{31}$$

V nadaljevanju definirajmo še q:

$$q = \left\lfloor \frac{n}{k_i} \right\rfloor; \qquad qk_i \le n < (q+1)k_i. \tag{32}$$

Po lemi 2.5 je ulomek $\frac{h_i}{k_i}$ okrajšan, zato k_i celih števil oblike

$$h_i, 2h_i, 3h_i, \ldots, k_ih_i$$

tvori vse ostanke pri deljenju s številom k_i. Ravno tako so točke $\left(\frac{mh_i}{k_i}\right)$ za $m = 1, 2, \ldots, k_i$ samo neka preureditev točk

$$0, \frac{1}{k_i}, \frac{2}{k_i}, \ldots, \frac{k_i - 1}{k_i}. \tag{33}$$

Razdalja med poljubnima zaporednima dvema točkama je $\frac{1}{k_i}$. Trdimo, da jih vsaj $k_i\ell(J) - 1$ leži znotraj podintervala J. Na intervalu dolžine $\ell(J)$ pričakujemo določeno število točk, in sicer $\frac{\ell(J)}{\frac{1}{k_i}} = k_i\ell(J)$. Ker pa je možno, da smo si izbrali tak interval, da je katera od robnih točk izpadla iz njega, moramo temu številu odšteti 1. Na intervalu J imamo vsaj $k_i\ell(J) - 1$ točk.
Točke $\left(\frac{mh_i}{k_i}\right)$; $\quad m = 1, 2, \ldots, qk_i$ so q-krat ponovljene točke iz zgornjega zaporedja (33). Od teh qk_i točk, jih najmanj $q(k_i\ell(J) - 1)$ leži znotraj intervala J.
Dokažimo zdaj, da za vsako vrednost m, za katero je $\left(\frac{mh_i}{k_i}\right)$ točka v J, ustrezna točka $(m\xi)$ leži v I.
Z uporabo leme 2.12, ter neenakosti (29) in (32) dobimo

$$\left| m\xi - \frac{mh_i}{k_i} \right| = m\left| \xi - \frac{h_i}{k_i} \right| \overset{\text{lema 2.12}}{<} m \cdot \frac{1}{k_ik_{i+1}} \overset{1 \le m \le qk_i}{\le} \frac{qk_i}{k_ik_{i+1}} \overset{(32)}{<} \frac{n}{k_ik_{i+1}} \overset{(29)}{<} \frac{1}{\sqrt{k_i}}$$

Ta neenakost pravi, da je razdalja med točkama $m\xi$ in $\frac{mh_i}{k_i}$ manjša od $\frac{1}{\sqrt{k_i}}$. Če želimo, da sta $(m\xi)$ in $\left(\frac{mh_i}{k_i}\right)$ ravno tako kot $m\xi$ in $\frac{mh_i}{k_i}$ med seboj oddaljena za manj kot $\frac{1}{\sqrt{k_i}}$, potem trdimo, da sta cela dela teh dveh števil enaka:

$$\lfloor m\xi \rfloor = \left\lfloor \frac{mh_i}{k_i} \right\rfloor.$$

Točka $\frac{mh_i}{k_i}$ je znotraj intervala $\left\lfloor m\frac{h_i}{k_i} \right\rfloor + J$. Točke v $\left\lfloor m\frac{h_i}{k_i} \right\rfloor + J$ so od $\left\lfloor m\frac{h_i}{k_i} \right\rfloor$ in $\left\lfloor m\frac{h_i}{k_i} \right\rfloor + 1$ oddaljene za več kot $\frac{1}{\sqrt{k_i}}$ po definiciji J. Potem mora biti tudi točka $m\xi$ znotraj intervala $\left(\left\lfloor m\frac{h_i}{k_i} \right\rfloor, \left\lfloor m\frac{h_i}{k_i} \right\rfloor + 1\right)$. Od tod sledi, da je celi del točk $m\xi$ in $\frac{mh_i}{k_i}$ enak. Torej je tudi razdalja med $(m\xi)$ in $\left(\frac{mh_i}{k_i}\right)$ manjša od $\frac{1}{\sqrt{k_i}}$, zato je $(m\xi)$ iz podintervala I. To nam omogoča drugače zapisati zaključek:
Izmed točk $(\xi), (2\xi), (3\xi), \ldots, (qk_i\xi)$, jih najmanj $q(k_i\ell(J) - 1)$ leži v podintervalu I. Ker pa je po (32) $n \geq qk_i$, velja tudi

$$n(I) \geq q(k_i\ell(J) - 1).$$

Preračunajmo in vstavimo znane podatke, da dobimo zvezo, ki jo potrebujemo:

$$\begin{aligned}
n(I) \geq& q(k_i\ell(J) - 1) = qk_i\ell(J) - q \\
\overset{(32)}{>}& \frac{(n - k_i)}{k_i} \cdot k_i\ell(J) - \frac{n}{k_i} \\
=& (n - k_i)\ell(J) - \frac{n}{k_i} \\
\overset{(31)}{=}& (n - k_i)\left(\ell(I) - \frac{2}{\sqrt{k_i}}\right) - \frac{n}{k_i} \\
=& n \cdot \ell(I) - \frac{2n}{\sqrt{k_i}} - k_i \cdot \ell(I) + \frac{2k_i}{\sqrt{k_i}} - \frac{n}{k_i} \\
\overset{\ell(I)\leq 1}{>}& n \cdot \ell(I) - k_i - \frac{3n}{\sqrt{k_i}}
\end{aligned}$$

Dobili smo torej zvezo

$$\begin{aligned}
n(I) >& n \cdot \ell(I) - k_i - \frac{3n}{\sqrt{k_i}} \qquad / : n \\
\frac{n(I)}{n} >& \ell(I) - \frac{k_i}{n} - \frac{3}{\sqrt{k_i}}.
\end{aligned}$$

Na tem rezultatu uporabimo še (29) in (30) in dobimo

$$\frac{k_i}{n} \overset{(29)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{k_{i-1}}} \overset{(30)}{<} \frac{\epsilon}{8}$$

in

$$\frac{3}{\sqrt{k_i}} < \frac{3}{\sqrt{k_{i-1}}} \overset{(30)}{<} \frac{3\epsilon}{8}.$$

Vse to uporabimo na zgornjem rezultatu

$$\frac{n(I)}{n} - \ell(I) > -\frac{\epsilon}{8} - \frac{3\epsilon}{8} = -\frac{\epsilon}{2}. \tag{34}$$

Če zdaj s C označimo komplement podintervala I znotraj enotskega intervala, potem lahko za C neenakost (34) zapišemo

$$\frac{n(C)}{n} - \ell(C) > -\epsilon, \tag{35}$$

kjer je $n(C)$ število točk $(\xi), (2\xi), (3\xi), \ldots, (n\xi)$, ki ležijo v C. Namesto $\frac{\epsilon}{2}$ imamo zdaj ϵ, saj je podmnožica C sestavljena iz dveh intervalov. Jasno je $n(I) + n(C) = n$ (torej $n(C) = n - n(I)$) in $\ell(I) + \ell(C) = 1$ (torej je $\ell(C) = 1 - \ell(I)$). Zdaj lahko te zveze vstavimo v (35):

$$\begin{aligned} \frac{n(C)}{n} - \ell(C) &> -\epsilon \\ \frac{n - n(I)}{n} - 1 + \ell(I) &> -\epsilon \\ 1 - \frac{n(I)}{n} - 1 + \ell(I) &> -\epsilon \\ -\frac{n(I)}{n} + \ell(I) &> -\epsilon \qquad / \cdot (-1) \\ \frac{n(I)}{n} - \ell(I) &< \epsilon \end{aligned}$$

Prav ta neenakost skupaj z (34) dokazuje, da (28) drži in trditev je dokazana. □

Posledica 3.4. *Število ξ je iracionalno, če in samo če so točke $(\xi), (2\xi), (3\xi), \ldots$ povsod v enotskem intervalu goste.*

Dokaz. Če je ξ iracionalno število, rezultat sledi po trditvi 3.3, saj izraz "povsod goste" pomeni, da je na vsakem intervalu vsaj ena točka. Ker iz enakomerne porazdelitve sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(I)}{n} = \ell(I) > 0,$$

to pomeni, da je tudi $n(I) \neq 0$ za velike n.
Če je ξ racionalno število, na primer $\xi = \frac{a}{b}$, kjer je $b > 0$ in $D(a, b) = 1$, potem so točke diskretne. Pravzaprav dobimo končen nabor točk $0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$. □

4. Dokaz s Fourierjevo analizo

V tem delu pa si poglejmo bolj prefinjen dokaz trditve 3.3, in sicer z uporabo trigonometričnih vsot.
V nadaljevanju bomo uporabili Weylovo metodo. Ta metoda se, odkar je bila prvič predstavljena, pogosto uporablja v teoriji števil. Za začetek navedimo osnovni rezultat o konvergenci Fourierjevih vrst, ki ga najdemo v [**3**] na koncu strani 21.

Lema 3.5. *Fourierova vrsta za odsekoma linearno funkcijo konvergira enakomerno k funkciji za vse vrednosti spremenljivke.*

OPOMBA:
Z odsekoma linearno funkcijo je mišljena zvezna funkcija, katere graf je v katerikoli periodi sestavljen iz končnega števila daljic. Torej, imamo nek interval v katerem narišemo odsekoma linearno funkcijo in ta interval se ponavlja v neskončnost.
Da bomo lahko dokazali trditev 3.3, moramo najprej pogledati posebno obliko Weylovega kriterija za enakomerno porazdelitev.

TRDITEV 3.6. *Zaporedje realnih števil* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ *je enakomerno porazdeljeno po modulu celih števil, če je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp(2\pi i h \beta_j) = 0 \tag{36}$$

za vsako naravno število h.

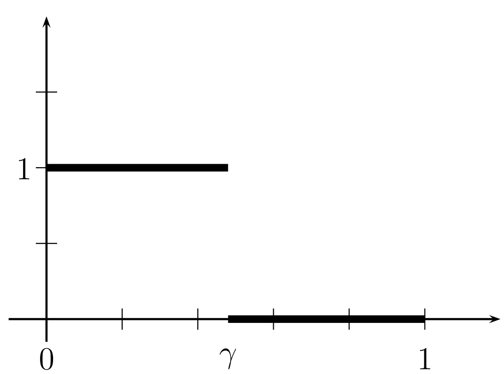
DOKAZ. Naj bo $\gamma \in \mathbb{R}$, za katero velja $0 < \gamma \leq 1$. Z I označimo interval takih točk t, za katere je $0 \leq t < \gamma$. Potrebovali bomo še (β), s katero tudi tokrat označimo decimalni del β. Število točk $(\beta_1), (\beta_2), (\beta_3), \ldots, (\beta_n)$, ki ležijo v I, označimo z $n(I)$.
Predpostavimo, da velja (36) in dokažimo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(I)}{n} = \gamma. \tag{37}$$

I je pravzaprav posebne vrste podinterval, saj ima vsak interval take vrste levo krajišče v točki 0. Kljub temu pa zgornja zveza velja za splošen podinterval, saj ga lahko dobimo z razliko dveh podintervalov z začetkom v točki 0.
Za $\gamma = 1$ rezultat (37) sledi iz opombe takoj za definicijo 3.1.
Preveriti moramo še za $\gamma < 1$.
Definirajmo periodično funkcijo $g(t)$ z:

$$g(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < \gamma \\ 0; & \gamma \leq t < 1 \end{cases}$$

$$g(t+k) = g(t); \quad \text{za vsak } k \in \mathbb{Z}$$



SLIKA 1. Nezvezna funkcija $g(t)$.

Potem je število točk (β_j), ki ležijo znotraj intervala $I = [0, \gamma)$ enako

$$n(I) = \sum_{j=1}^{n} g(\beta_j). \tag{38}$$

$g(t)$ zdaj ni zvezna, kot se lepo vidi iz slike 1. Če želimo dobiti dve periodični funkciji $g_1(t)$ in $g_2(t)$, ki aproksimirata funkcijo $g(t)$ od spodaj in od zgoraj, potem nadaljujemo na sledeči način.
Izberimo neko dovolj majhno pozitivno realno število ϵ, za katero velja

$$2\epsilon < \gamma \quad \text{in} \quad 2\epsilon < 1 - \gamma. \tag{39}$$

Potem lahko definiramo še periodični odsekoma linearni funkciji $g_1(t)$ in $g_2(t)$ z enačbami:

$$g_1(t+k) = g_1(t), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{\epsilon}; & 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1; & \epsilon \leq t \leq \gamma - \epsilon \\ -\frac{t}{\epsilon} + \frac{\gamma}{\epsilon}; & \gamma - \epsilon \leq t \leq \gamma \\ 0; & \gamma \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ter

$$g_2(t+k) = g_2(t), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

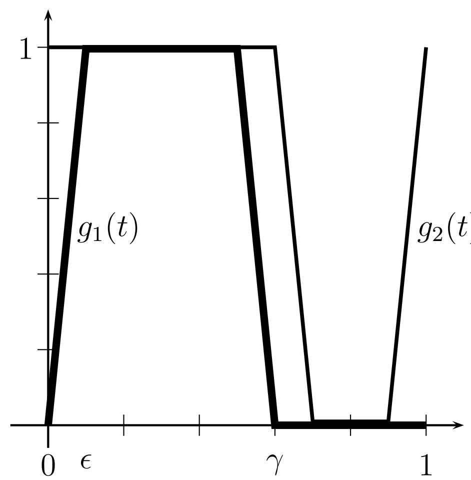
$$g_2(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq \gamma \\ -\frac{t}{\epsilon} + \frac{\gamma+\epsilon}{\epsilon}; & \gamma \leq t \leq \gamma + \epsilon \\ 0; & \gamma + \epsilon \leq t \leq 1 - \epsilon \\ \frac{t}{\epsilon} - \frac{1-\epsilon}{\epsilon}; & 1 - \epsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Iz slike 2 vidimo, da velja

$$g_1(t) \leq g(t) \leq g_2(t); \quad \text{za vsak } t. \tag{40}$$

Po lemi 3.5 imata tako $g_1(t)$ kot $g_2(t)$ enakomeren razvoj v Fourierjevo vrsto, in sicer:

$$\begin{aligned} g_1(t) =& a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos 2\pi h t + b_h \sin 2\pi h t) \\ g_2(t) =& c_0 + \sum_{h=1}^{\infty} (c_h \cos 2\pi h t + d_h \sin 2\pi h t) \end{aligned} \tag{41}$$



Slika 2. Periodični, zvezni in odsekoma linearni funkciji $g_1(t)$ in $g_2(t)$.

Potrebovali bomo pravi vrednosti a_0 in c_0, zato ju izračunajmo.

$$\begin{aligned}
a_0 =& \int_0^1 g_1(t)dt \\
=& \int_0^{\epsilon} \frac{t}{\epsilon}dt + \int_{\epsilon}^{\gamma-\epsilon} 1dt + \int_{\gamma-\epsilon}^{\gamma} \left(-\frac{t}{\epsilon} + \frac{\gamma}{\epsilon}\right) dt + \int_{\gamma}^{1} 0dt \\
=& \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\epsilon} + [t]_{\epsilon}^{\gamma-\epsilon} - \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\gamma-\epsilon}^{\gamma} + \frac{\gamma}{\epsilon}[t]_{\gamma-\epsilon}^{\gamma} \\
=& \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon^2}{2} - 0\right) + (\gamma - \epsilon - \epsilon) - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{(\gamma-\epsilon)^2}{2}\right) + \frac{\gamma}{\epsilon}(\gamma - (\gamma - \epsilon)) \\
=& \frac{\epsilon}{2} + \gamma - 2\epsilon - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\gamma^2 - \gamma^2 - 2\gamma\epsilon - \epsilon^2}{2}\right) + \frac{\gamma}{\epsilon}(\gamma - \gamma + \epsilon) \\
=& \frac{\epsilon}{2} + \gamma - 2\epsilon - \gamma + \frac{\epsilon}{2} + \gamma \\
=& \gamma - \epsilon
\end{aligned} \tag{42}$$

$$c_0 = \int_0^1 g_2(t)dt = \gamma + \epsilon \tag{43}$$

Pravo vrednost c_0 izračunamo na podoben način kot zgoraj koeficient a_0 ali pa premislimo geometrično. Če se odločimo za geometričen način, potem iz slike vidimo, da ima funkcija $g_2(t)$ za vse vrednosti x, ki so manjše od γ, vrednost 1, torej imamo pravokotnik velikosti $1 \times \gamma = \gamma$. Preostanek je sestavljen iz dveh pravokotnih trikotnikov, katerih kateti sta dolgi po 1 in ϵ, torej $2 \cdot \frac{1 \cdot \epsilon}{2} = \epsilon$. Skupna ploščina je torej enaka $\gamma + \epsilon$.
Za ostale koeficiente bomo potrebovali le grobe ocene, ki jih izračunamo

$$
\begin{aligned}
|a_h| = &\left|2 \cdot \int_0^1 g_1(t)\cos 2\pi htdt\right| \leq 2\max|g_1(t)|\cdot|\cos 2\pi htdt| \leq 2 \\
|b_h| \leq &2 \\
|c_h| \leq &2 \\
|d_h| \leq &2 \quad \text{za vse } h \geq 1.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Zaradi enakomerne konvergence vrst v (41), obstaja tako celo število M, da za vsako vrednost t velja

$$
\left|\sum_{h=m+1}^{\infty}(a_h\cos 2\pi ht + b_h \sin 2\pi ht)\right| < \epsilon \qquad \text{za vsak } m \geq M. \tag{45}
$$

Pogoj (36) lahko zapišemo kot

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\cos 2\pi h\beta_j + i\sin 2\pi h\beta_j) \overset{(36)}{=} 0. \tag{46}
$$

Če je ta limita enaka 0, morata biti tako realni kot tudi imaginarni del enakosti enaka 0. Potem obstaja tak $N \in \mathbb{Z}$, da je

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos 2\pi h\beta_j\right| < \frac{\epsilon}{M} \\
\text{in} \\
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin 2\pi h\beta_j\right| < \frac{\epsilon}{M}
\end{gathered} \tag{47}
$$

za vsak $h = 1, 2, \ldots, M$ in vsak $n \geq N$. Ker za vsak $h = 1, \ldots, M$ posebej veljata zgornji neenakosti in za vsak h imamo drug N, vzamemo zdaj največjega med N-ji, ki bo zagotovo ustrezal vsem pogojem. Naj bo zdaj n tako celo število, da bo zadostilo tako $n \geq N$ kot tudi $n \geq M$. V g_1 iz (41) zamenjamo t z $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in z uporabo (42) dobimo

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} g_1(\beta_j) = &n(\gamma - \epsilon) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=M+1}^{\infty}(a_h\cos 2\pi h\beta_j + b_h\sin 2\pi h\beta_j) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{M}(a_h\cos 2\pi h\beta_j + b_h\sin 2\pi h\beta_j)
\end{aligned}
$$

Pri končnih vsotah lahko zamenjamo vrstni red seštevanja. Nato uporabimo še trikotniško neenakost. Ker sta $g_1(t)$ in $\gamma - \epsilon$ nenegativni, dobimo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} g_1(\beta_j) &= \left|\sum_{j=1}^{n} g_1(\beta_j)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n}\left(a_0 + \sum_{h=1}^{\infty}(a_h \cos 2\pi h\beta_j + b_h \sin 2\pi h\beta_j)\right)\right| \\
&\geq n(\gamma - \epsilon) - \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{h=M+1}^{\infty}(a_h \cos 2\pi h\beta_j + b_h \sin 2\pi h\beta_j)\right| \\
&\quad - \sum_{h=1}^{M}\left|a_h \sum_{j=1}^{n}\cos 2\pi h\beta_j + b_h \sum_{j=1}^{n}\sin 2\pi h\beta_j\right| \\
&\overset{(45)}{\geq} n(\gamma - \epsilon) - \sum_{j=1}^{n}\epsilon \\
&\quad - \sum_{h=1}^{M}\left\{|a_h| \cdot \left|\sum_{j=1}^{n}\cos 2\pi h\beta_j\right| + |b_h| \cdot \left|\sum_{j=1}^{n}\sin 2\pi h\beta_j\right|\right\} \\
&\geq n(\gamma - \epsilon) - n\epsilon - \sum_{h=1}^{M}\left\{2 \cdot \frac{n\epsilon}{M} + 2 \cdot \frac{n\epsilon}{M}\right\} \\
&= n\gamma - n\epsilon - n\epsilon - M \cdot \frac{4n\epsilon}{M} \\
&= n\gamma - 6n\epsilon \\
&= n(\gamma - 6\epsilon).
\end{aligned}$$

Na podoben način analiziramo tudi $g_2(t)$ in zaključimo, da je

$$\sum_{j=1}^{n} g_2(\beta_j) \leq n(\gamma + 6\epsilon)$$

za vse dovolj velike n. Ti dve neenakosti nam skupaj s (40) dasta

$$\gamma - 6\epsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(\beta_j) \leq \gamma + 6\epsilon.$$

Ker je ϵ poljubno majhno število, je z upoštevanjem (38)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(I)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(\beta_j) = \gamma,$$

kar pa je ravno (37). □

Iz dokaza trditve 3.6 lahko sklepamo še, da se da trditev 3.3 preveriti še na drug način. Pokazati moramo, da (36) drži za vrednosti $\beta_j = j\xi$, kjer je ξ neko iracionalno število.

Opazimo, da je

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\exp(2\pi ihj\xi)\right| =&\frac{|\exp(2\pi ih\xi(n+1))-\exp(2\pi ih\xi)|}{|\exp(2\pi ih\xi)-1|}\\ \leq&\frac{|\exp(2\pi ih\xi(n+1))|+|\exp(2\pi ih\xi)|}{|\exp(2\pi ih\xi)-1|}\\ \leq&\frac{2}{|\exp(2\pi ih\xi)-1|}\\ =&c(h,\xi),\end{aligned}$$

kjer je $c(h,\xi)$ očitno neodvisna od n. Prav tako opazimo, da je $|\exp(2\pi ih\xi)-1|\neq 0$, saj je $h\xi$ iracionalno število. Vstavimo v (36) in izračunamo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\exp(2\pi ih\beta_j)\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\exp(2\pi ihj\xi)\right|\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{c(h,\xi)}{n}=0.\end{aligned}$$

POGLAVJE 4

Aproksimacija kompleksnih iracionalnih števil

1. Uvod

V prejšnjih poglavjih smo s pomočjo Dirichletovega principa pokazali, da lahko iracionalno število ξ aproksimiramo z neskončno mnogo racionalnimi števili oblike $\frac{h}{k}$ in zanje velja neenakost

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{s}{k^2},$$

pri tem pa je $s = 1$. Pozneje smo pokazali celo, da neenakost velja za neskončno mnogo racionalnih števil $\frac{h}{k}$ in vrednost $s = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Prav tako smo pokazali, da je v primeru, ko je $s < \frac{1}{\sqrt{5}}$, takšnih racionalnih števil za nekatere ξ le končno mnogo.

Ta problem želimo zdaj posplošiti še na kompleksna števila. Naj bo torej ω neko kompleksno iracionalno število, ulomek $\frac{p}{q}$ naj predstavlja kompleksno racionalno število (to pomeni, da sta p in q oblike $m + in$, m, $n \in \mathbb{Z}$) in $\overline{q}$ konjugirano število q, za katere velja neenakost

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{h}{q\overline{q}},$$

kjer je $h \in \mathbb{R}$. Hermite je leta 1854 v reviji Journal für Mathematik objavil članek, v katerem je dokazal, da za vrednost $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ obstaja neskončno mnogo racionalnih števil, ki zadoščajo zgornji neenakosti. Dolgo pa je ostalo odprto vprašanje najmanjše take vrednosti, ki bi še zadoščala neenakosti in za katero bi obstajalo neskončno mnogo kompleksnih racionalnih števil, ki bi aproksimirala kompleksno iracionalno število ω. Težava je bila v tem, da so se dokazov lotevali z metodo verižnih ulomkov, s katerimi pa kompleksna števila niso bila dovolj dobro predstavljena. Zato je Lester R. Ford leta 1925 v reviji Transactions of the American Mathematical Society objavil geometrijski dokaz sledeče trditve.

Trditev 4.1. *Naj bo $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Potem neskončno mnogo racionalnih kompleksnih števil $\frac{p}{q}$ zadošča neenakosti*

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{h}{q\overline{q}}. \tag{48}$$

Naj bo $h < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Potem obstaja množica iracionalnih kompleksnih števil, ki so v kompleksni ravnini povsod gosta, da je za vsako od njih neenakost (48) izpolnjena le za končno mnogo racionalnih števil.

Drugega dela trditve ne bomo dokazovali. Pripomnimo le, da je iracionalno število, za katero je $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ najboljša možna konstanta, na primer $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kogar zanima tudi dokaz, si ga lahko ogleda v članku [**2**].
Najprej razjasnimo pojme, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju, da bomo lahko dokazali prvi del trditve 4.1.

2. Geometrijska postavitev problema

Predstavljajmo si kompleksno ravnino $\mathbb{C}$, v kateri so kompleksna števila predstavljena kot horizontalna ravnina v 3-razsežnem prostoru. Pomagali si bomo s polprostorom, ki leži na eni strani te kompleksne ravnine, na primer nad njo. V kompleksni ravnini izberimo točko ω. Naj bo L_ω premica, ki poteka skozi točko ω in je pravokotna na kompleksno ravnino $\mathbb{C}$. Za vsako racionalno točko $\frac{p}{q}$ v kompleksni ravnini, kjer je $\frac{p}{q}$ okrajšan ulomek, naj bo $S_{p/q}$ sfera, tangentna na kompleksno ravnino v točki $\frac{p}{q}$, ki ima polmer $\frac{1}{2hq\overline{q}}$, kjer je $h > 0$. Če L_ω seka notranjost sfere $S_{p/q}$, potem je razdalja med ω in $\frac{p}{q}$ manjša od radija $S_{p/q}$, torej velja

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2hq\overline{q}}.$$

Pokazati moramo, da za vrednost $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, L_ω seka notranjosti neskončno mnogo takih sfer.

3. Picardova grupa

Pravkar definirane sfere so povezane z grupo ulomljenih linearnih preslikav na $\mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}, \quad ad - bc = -1, \tag{49}$$

kjer so a, b, c, d cela kompleksna števila in z kompleksno število. Preslikava φ slika racionalne točke v $\mathbb{C}$ nazaj v racionalne točke. To preverimo z direktnim izračunom

$$\begin{aligned}\varphi(z) = \varphi\left(\frac{m+in}{p+iq}\right) &= \frac{a\overline{\frac{m+in}{p+iq}} + b}{c\overline{\frac{m+in}{p+iq}} + d} \\ &= \frac{(a_1 + ia_2)\left(\frac{m-in}{p-iq}\right) + (b_1 + ib_2)}{(c_1 + ic_2)\left(\frac{m-in}{p-iq}\right) + (d_1 + id_2)}\end{aligned} \tag{50}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{(a_1+ia_2)(m-in)+(b_1+ib_2)(p-iq)}{p-iq}}{\frac{(c_1+ic_2)(m-in)+(d_1+id_2)(p-iq)}{p-iq}} \\
&= \frac{a_1m + a_2n + i(a_2m - a_1n) + b_1p + b_2q + i(b_2p - b_1q)}{c_1m + c_2n + i(c_2m - c_1n) + d_1p + d_2q + i(d_2p - d_1q)} \\
&= \frac{a_1m + a_2n + b_1p + b_q + i(a_2m - a_1n + b_2p - b_1q)}{c_1m + c_2n + d_1p + d_q + i(c_2m - c_1n + d_2p - d_1q)} \\
&= \frac{m' + in'}{p' + iq'}.
\end{aligned}
$$

V nadaljevanju bomo upoštevali, da je ulomljena linearna preslikava v kompleksni ravnini inverzija v neki krožnici.
V enotski krožnici poiščemo inverzno točko kompleksne točke z z enačbo

$$
\begin{aligned}
|z| \cdot |z'| &= 1, \\
|z'| &= \frac{1}{|z|}
\end{aligned} \tag{51}
$$

Obe točki, z in z', ležita na isti premici, torej lahko z' izrazimo z z:

$$z' = k \cdot z, \tag{52}$$

kjer je $k > 0$. Če spet primerjamo dolžine, lahko dolžino z' ravno tako izrazimo z dolžino z

$$|z'| = |k \cdot z| = k \cdot |z|, \text{ saj je } k > 0. \tag{53}$$

Iz (51) in (53) sledi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|z|} &= k \cdot |z| \\
k &= \frac{1}{|z|^2}.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Rezultat vstavimo v (52) in dobimo

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\overline{z}} \\
&= \frac{1}{\overline{z}}.
\end{aligned} \tag{55}
$$

Poglejmo še inverzijo v krožnici K, ki ima polmer r in središče v neki celi kompleksni točki a. V tem primeru velja

$$
\begin{aligned}
|z-a| \cdot |z'-a| &= r^2 \\
|z'-a| &= \frac{r^2}{|z-a|}.
\end{aligned} \tag{56}
$$

Podobno, kot prej, tudi v tem primeru velja, da z in z' ležita na isti premici skozi a, torej lahko z' izrazimo

$$z' - a = k \cdot (z - a) \tag{57}$$

in

$$|z' - a| = k \cdot |z - a|. \tag{58}$$

Iz (56) in (58) vidimo, da je

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{|z-a|} &= k \cdot |z-a| \\ k &= \frac{r^2}{|z-a|^2}. \end{aligned} \tag{59}$$

Vstavimo rezultat v (57) in dobimo

$$\begin{aligned} z' - a =& \frac{r^2}{|z-a|^2} \cdot (z-a) \\ =& \frac{r^2}{(z-a)\overline{(z-a)}} \cdot (z-a) \\ =& \frac{r^2}{\overline{z-a}} \\ =& \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}}. \end{aligned} \tag{60}$$

Od tu ven izrazimo

$$\begin{aligned} z' &= \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a \\ &= \frac{r^2 + a\overline{z} - a\overline{a}}{\overline{z}-\overline{a}} \\ &= \frac{a\overline{z} + (r^2 - |a|^2)}{\overline{z}-\overline{a}}. \end{aligned} \tag{61}$$

Dobimo posebno vrsto ulomljene linearne preslikave

$$\varphi(z) = \frac{a\overline{z} + b}{\overline{z}-\overline{a}}.$$

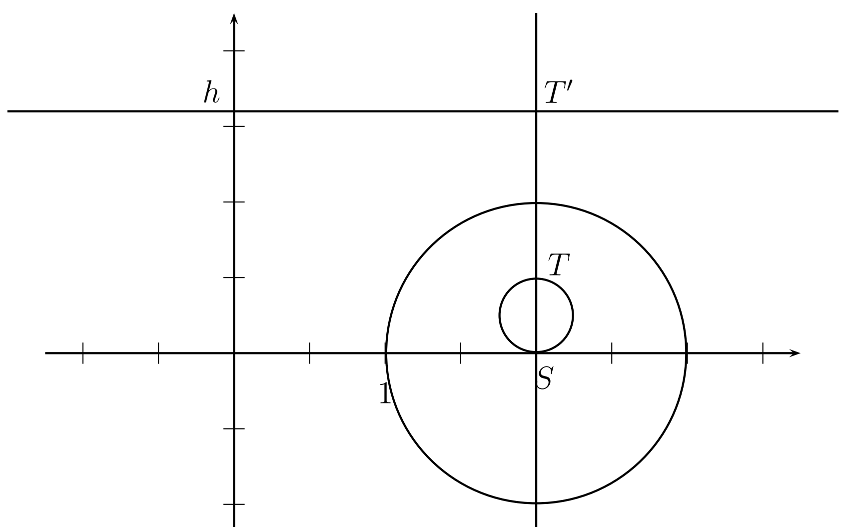
Preveriti moramo, da je taka preslikava res dobro definirana. Koeficienti v enačbi morajo namreč biti cela kompleksna števila in izpolnjevati pogoj (49). Po predpostavki je a že celo kompleksno število, ravno tako njegovo konjugirano število $\overline{a}$. Ker mora biti tudi $r^2 - |a|^2$ celo (kompleksno) število, je tudi r^2 celo kompleksno število in

$$\begin{aligned} a \cdot (-\overline{a}) - (r^2 - |a|^2) \cdot 1 &= -1 \\ -|a|^2 - r^2 + |a|^2 &= -1 \\ -r^2 &= -1 \\ r &= 1. \end{aligned} \tag{62}$$

To pa pomeni, da lahko inverzijo delamo le v enotskih krožnicah. Inverzijo v dani krožnici K lahko razširimo do inverzije v $\mathbb{R}^3$ v sferi, ki ima K za ekvator. Inverzija slika sfere in ravnine v sfere in ravnine, ter ohranja kote. Delamo inverzijo v enotskih sferah s središči v celih kompleksnih številih a. Sfere $S_{p/q}$, ki so tangentne na kompleksno ravnino v središčih inverznih sfer se preslikajo v točno določeno ravnino. Točka dotikališča s kompleksno ravnino se z inverzijo preslika v neskončno. Potrebujemo še inverz neke druge točke iz $S_{p/q}$. Ker vemo, da inverzija ohranja kote, izberimo točko T, ki leži na pravokotnici skozi dotikališče oziroma središče inverzije. V inverziji zanjo velja $|ST| \cdot |ST'| = r^2$. $|ST|$ je ravno premer $S_{p/q}$. Ker pa delamo inverzijo v enotski krožnici s središčem v celoštevilski točki a, je q v resnici enak 1, torej $|ST| = 2\frac{1}{2hq\bar{q}} = \frac{1}{h}$. Zato je

$$\begin{aligned}\frac{1}{h} \cdot |ST'| &= 1 \\ |ST'| &= h,\end{aligned} \tag{63}$$

kar pomeni, da je T' na višini h, ohrani se še pravi kot, torej dobimo ravnino, ki je na višini $\zeta = h$ vzporedna s kompleksno ravnino, kar je nazorno pokazano tudi na sliki 1.



SLIKA 1. Slika $S_{p/q}$, ki se dotika kompleksne ravnine v središču sfere inverzije, je ravnina $\zeta = h$.

$S_{p/q}$, ki ne teče skozi središče inverzne sfere pa se preslika nazaj v sfero. V tem primeru se sfera kompleksne ravnine dotika v neki poljubni racionalni točki $A = (\frac{p}{q}, 0)$, kjer q ni nujno enak 1. Polmer te sfere je torej $\frac{1}{2hq\bar{q}}$. Točka A se z inverzijo v sferi s središčem v celoštevilski točki S preslika v tako točko $A' = (\frac{p'}{q'}, 0)$ na istem poltraku, da izpolnjuje pogoj $|SA| \cdot |SA'| = r^2 = 1$. Pri tem se sfera, na kateri leži A in ima polmer $r = \frac{1}{2h|q|^2}$, preko sfere inverzije preslika v neko drugo sfero, na kateri leži A' in ima polmer r'. Pokazati želimo, da je dobljena sfera $S_{p'/q'}$. Izračunajmo najprej njen polmer z uporabo enačbe

(61).

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{a\overline{z} + (r^2 - |a|^2)}{\overline{z} - \overline{a}} \\
&= \frac{a \cdot \frac{\overline{p}}{\overline{q}} + (1 - |a|^2)}{\frac{\overline{p}}{\overline{q}} + \overline{a}} \\
&= \frac{a\overline{p} + \overline{q}(1 - |a|^2)}{\overline{p} - \overline{qa}}
\end{aligned} \tag{64}
$$

Polmer sfere $S_{p'/q'}$ je torej enak

$$
r' = \frac{1}{2h|\overline{p} - \overline{qa}|^2} = \frac{1}{2h|p - qa|^2}. \tag{65}
$$

Zdaj potegnimo poltrak iz središča S sfere inverzije skozi središče $S_{p/q}$ in označimo presečišči poltraka s $S_{p/q}$ z B in C, kot kaže slika 2. Potem se B z inverzijo v enotski sferi preslika v B' in C se preslika v C', ki ležita na istem poltraku skozi središče $S_{p/q}$. Tetiva BC je ravno premer $S_{p/q}$, zato je tudi tetiva $C'B'$ premer $S_{p'/q'}$. Polmera sta povezana z enačbo

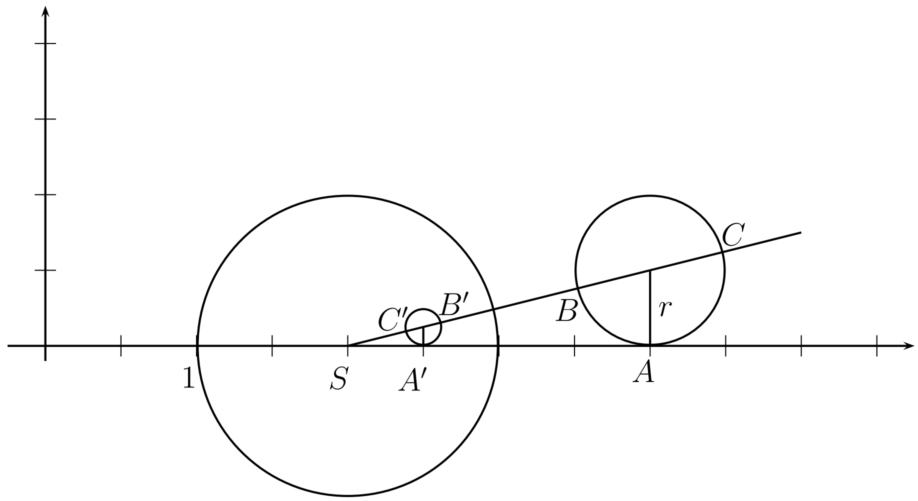
$$
\begin{aligned}
\frac{r'}{r} &= \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{\frac{1}{|SA|}}{|SA|} = \frac{1}{|SA|^2} \\
r' &= r \cdot \frac{1}{|SA|^2} = \frac{1}{2hq\overline{q}|SA|^2} = \frac{1}{2h|q|^2|\frac{p}{q} - a|^2} \\
r' &= \frac{1}{2h|p - aq|^2}.
\end{aligned} \tag{66}
$$

S tem smo pokazali, da se množica sfer $S_{p/q}$ res slika nazaj v množico sfer $S_{p'/q'}$ in ravnino $\zeta = h$.

4. Razdelitev prostora v pentaedre

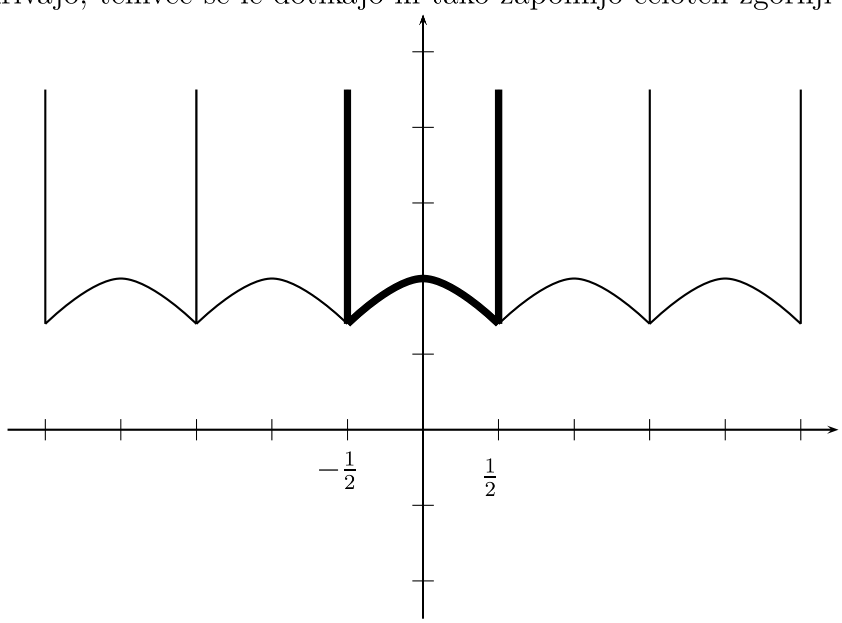
Bistvenega pomena za delovanje grupe predstavlja pentaeder, ki ga je odkril Bianchi. Pišimo $z = \xi + i\eta$.

Osnovni pentaeder je del prostora, ki leži nad enotsko sfero s središčem v izhodišču $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$, ter je omejen s štirimi ravninami $\xi = \pm\frac{1}{2}$, $\eta = \pm\frac{1}{2}$. Osnovni pentaeder ima lastnost inverzije, torej so njegove mejne ploskve ravnine in sfere, zato lahko delamo inverzne slike v njegovih licih. Spredne, zadnje in stranski lici osnovnega pentaedra, ga prezrcalijo v skladen pentaeder, kot vidimo na sliki 3. Inverzija pentaedra preko spodnjega lica, ki je del enotske sfere inverzije, pa zahteva nekoliko več dela in prostorske predstave. Ravnina oziroma stranska lica pentaedra se preslikajo v del sfere, ki teče od presečišča sfere inverzije in ravnine proti središču sfere inverzije, v katerega se slika točka ∞. Dobimo telo, ki je na sliki 4 predstavljeno dvodimenzionalno. Tako osnovni pentaeder, kot tudi vse njegove slike, imajo lastnost inverzije, zato lahko vsako sliko ponovno preslikamo z inverzijo in dobimo novo sliko pentaedra. Slike se vedno bolj približujejo kompleksni ravnini in bližje



SLIKA 2. Slika $S_{p/q}$, ki se kompleksne ravnine dotika v poljubni racionalni točki $\frac{p}{q}$, je spet sfera.

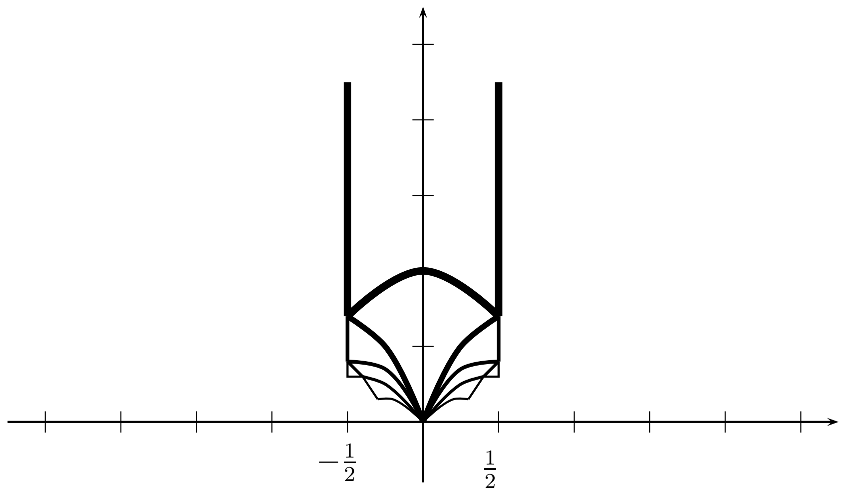
ko so, več jih je. Tako dobimo neskončno mnogo slik osnovnega pentaedra, ki se med seboj ne prekrivajo, temveč se le dotikajo in tako zapolnijo celoten zgornji polprostor.



SLIKA 3. Osnovni pentaeder v $\mathbb{R}^2$ in njegove slike, če delamo inverzije v njegovih stranskih ploskvah.

5. Dokaz prvega dela trditve

DOKAZ PRVEGA DELA TRDITVE 4.1. Naj bo $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Predpostavimo, da L_ω seka notranjosti le končno mnogo $S_{p/q}$. Potem gre L_ω v okolici točke ω skozi neskončno mnogo



SLIKA 4. Osnovni pentaeder v $\mathbb{R}^2$ in njegove slike, če delamo inverzije v licih pentaedrov.

pentaedrov in ne seka notranjosti nobene sfere $S_{p/q}$, temveč je nanje kvečjemu tangentna. Pokazali bomo, da je to nemogoče.

Naj bo D nek pentaeder, skozi katerega teče omenjeni odsek L_ω. Naredimo preslikavo, ki D preslika v osnovni pentaeder. Ker se krožnice preslikajo v krožnice in se koti pri tej preslikavi ohranjajo, trdimo, da se L_ω preslika v polkrožnico C, ki je pravokotna na kompleksno ravnino in poteka skozi osnovni pentaeder. Premica skozi ω se namreč preko sfere inverzije ne more preslikati v neko drugo premico, saj seka rob pentaedra D v dveh točkah, zato mora tudi njegova slika sekati rob osnovnega pentaedra v dveh točkah. To pa pomeni, da slika premice ne more biti premica, temveč mora biti lok krožnice.

Preverimo, ali res lahko dobimo tako polkrožnico, ki bo pravokotna na kompleksno ravnino in bo potekala skozi osnovni pentaeder, pri tem pa ne bo sekala notranjosti nobene sfere $S_{p/q}$ v bližini.

Točke osnovnega pentaedra, ki so najbližje kompleksni ravnini, imajo ζ koordinate enake $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pri tem upoštevamo, da gledamo pentaeder v zgornjem polprostoru nad sfero z enačbo $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$. Najbližje točke so v presečiščih z ravninani $\xi=\pm\frac{1}{2}$ in $\zeta=\pm\frac{1}{2}$, zato dobimo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\zeta^2 =&1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\zeta^2 =&1\\ \zeta^2 =&\frac{1}{2}\\ \zeta =&\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned} \tag{67}$$

Ker želimo, da C teče skozi osnovni pentaeder in ne sme sekati notranjosti nobene sfere, polmer krožnice C omejimo z

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{68}$$

saj vemo, da se sfere, ki imajo dotikališče v središču inverzne sfere, preslikajo v ravnino $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Poglejmo sfere S_p celoštevilskih točk $p \in \mathbb{C}$. Te so tangentne na kompleksno ravnino v celoštevilskih točkah $p \in \mathbb{C}$, torej je $q = 1$ in imajo radij enak

$$r = \frac{1}{2hq\overline{q}} = \frac{1}{\sqrt{3}q\overline{q}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{69}$$

Presek teh sfer z ravnino $\zeta = konst.$ je množica krožnic s središči navpično nad celoštevilskimi točkami v kompleksni ravnini. Poglejmo, kaj so ti preseki za sfero, tangentno na $\mathbb{C}$ v točki $\frac{0}{1}$, torej v izhodišču. Enačba sfere, ki ima središče v točki $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ in polmer $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ je:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 =& \frac{1}{3} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta + \frac{1}{3} =& \frac{1}{3} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta =& 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Dve sosednji sferi se sekata v

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 &= (\xi - 1)^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 \\ \xi^2 &= (\xi - 1)^2 \\ 2\xi - 1 &= 0 \\ \xi &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \zeta^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta &= 0 \\ \zeta^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta + \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned} \tag{72}$$

$$\zeta_{1,2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{4}{3} - 1}}{2}$$
$$\zeta_{1,2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}$$
$$\zeta_1 = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\zeta_2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

in presek z ravninama $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ nam da krožnici z enačbo

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \frac{3}{4} - 1 &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{73}$$

in

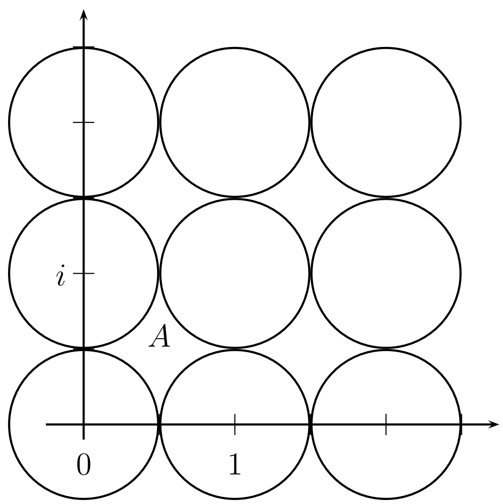
$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \frac{3}{36} - \frac{2}{6} &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{9}{36} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{74}$$

Kot vidimo, je na obeh višinah radij take krožnice enak $\frac{1}{2}$.
To je bil le presek ravnine $\zeta = konst.$ s sfero, ki je tangentna na kompleksno ravnino v izhodišču. Predstavljajmo si več sfer, vse so tangentne na kompleksno ravnino v celoštevilskih točkah in imajo polmer enak $\frac{1}{\sqrt{3}}$, torej se med seboj sekajo. Kaj dobimo, če jih presekamo z ravninama $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$? Dobimo krožnice s središči v celoštevilskih točkah nad kompleksno ravnino in polmerom $\frac{1}{2}$, torej so med seboj tangentne. Vse ostale ravnine med ravninama $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ sekajo sfere v večjih krožnicah, ki se med seboj sekajo.
Naj bosta K_1 in K_2 presečišči polkrožnice C in ravnine $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Če naj C ne seka notranjosti celoštevilskih sfer, potem morata K_1 in K_2 ležati znotraj enega od območij med krožnicami, kot je A na sliki 5, ki ga tvorijo štiri tangentne krožnice. Ker je polmer C omejen z (68), lahko hitro izračunamo, da K_1 in K_2 ne moreta obe ležati v istem območju

A, saj je razdalja med njima vsaj

$$
\begin{aligned}
&|K_1K_2| = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} \\
&|K_1K_2| = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{3}{36}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt{15}}{3} > 1,29 > 1.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Ostane nam še možnost, da K_1 in K_2 ležita v različnih območjih oblike A, torej mora lok nad tetivo K_1K_2 teči nad določenimi sferami S, ki so tangentne na kompleksno ravnino v celoštevilskih točkah.



Slika 5. Prerez sfer z ravnino $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ali $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Upoštevajmo dejstvo, da na sliki 5 vidimo presek ravnine $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ s sferami, tangentnimi na kompleksno ravnino v celoštevilskih točkah. Vidimo, da imata sosednji sferi skupno vodoravno tangento, ki leži v ravnini $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, v točkah, kjer se krožnice, ki nastanejo pri tem preseku, dotikajo. Torej je edini možni položaj C, če nočemo, da prodre v notranjost kake sfere ali uide nad ravnino $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da se dotika dveh sfer in ravnine v tisti točki, kjer imata ti sferi skupno vodoravno tangento.
Torej C leži na enem od štirih lic osnovnega pentaedra. Zaradi simetrije je dovolj preveriti en primer. Recimo, da C leži v ravnini $\xi = \frac{1}{2}$, ima polmer $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in središče v točki $S(\frac{1}{2}, 0, 0)$. V tem primeru lok C kompleksno ravnino seka v točkah

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{in} \qquad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obe točki sta iracionalni, medtem ko slika premice L_ω seka kompleksno ravnino v neki racionalni točki, namreč v sliki točke ∞, saj vemo, da se ta točka z inverzijo slika v središče sfere inverzije, za katero pa smo že prej povedali, da ima središče v racionalni točki. Če je torej $z = \infty$ imamo v (49) $z' = \frac{a}{c}$, ki je racionalno število. Posledično ta polkrožnica ne more biti slika L_ω.
Dokazali smo, da ima vsaka slika premice L_ω, ki teče skozi osnovni pentaeder, odsek bodisi nad ravnino $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bodisi seka notranjost celoštevilske sfere S_p, in sicer nad ravnino $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblikujemo lahko z valjem $\xi^2 + \eta^2 = 25$ omejeno območje nad $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Naj bo N število pentaedrov, ki se razprostirajo znotraj tega območja. Iz geometrije pentaederske delitve vemo, da je N končno število. Število pentaedrov v območju, skozi katerega teče polkrožna slika L_ω, je torej manjše od N.
Po drugi strani pa, če te rezultate prenesemo nazaj na začetni pentaeder D, vidimo, da L_ω teče skozi notranjost sfere $S_{p/q}$ in seka N zaporednih pentaedrov, vključno s pentaedrom D. Pod izbranim pentaedrom D se nahaja še neskončno mnogo drugih pentaedrov, prav tako slik osnovnega in ostalih njegovih predhodnikov. Vsakemu od preostalih pentaedrov pripada točno določena sfera, skozi katero teče L_ω. L_ω pri tem seka največ N zaporednih pentaedrov. Ker pa je takih pentaedrov, za katere najdemo ustrezne sfere $S_{p/q}$, neskončno mnogo, smo prišli do protislovja in dokazali prvi del trditve. $\square$

Literatura

[1] I. Niven, *Irrational numbers*, The Mathematical Association of America, 1956.

[2] L. R. Ford, *On the Closeness of Approach of Complex Rational Fractions to a Complex Irrational Number*, Transactions of the American Society **2** (1925) 146-154.

[3] D. Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, The Mathematical Association of America, 1941.