Povzetek

Naj bo n naravno število, večje od 2. Naj bo na grupi G dan predpis oblike $c_n = [x, y]$, kjer je c_n levo normiran komutator dolžine n z argumenti iz množice $\{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$. Ukvarjali se bomo predvsem z vprašanjem, pod kakšnimi pogoji je grupa G skupaj s takim predpisom Abelova. Seveda je dovolj obravnavati le primer, ko je G grupa z dvema generatorjema.

V prvem delu je navedeno nekaj pravil za računanje s komutatorji, prav tako pa je opisana korespondenca med komutatorji oblike c_n ter izrazi v „skoraj kolobarju" - strukturi, ki je za seštevanje grupa, za množenje monoid, obe operaciji pa povezuje leva distributivnost. To se kasneje izkaže za koristno pri obravnavi nekaterih predpisov. Prav tako so navedene osnovne lastnosti nilpotentnih grup (ta snov se na dodiplomskem študiju ne obravnava), poleg tega pa dokažemo še Schmidtov izrek. V nadaljevanju si ogledamo nekaj osnovnih rezultatov teorije Engelovih grup, posebej pa obravnavamo Engelove grupe redov 2, 3 in 4.

Ker je obravnava predpisov $c_n = [x, y]$ v zvezi s komutativnostjo grupe v splošnem preveč zahtevna, se lahko vprašamo, pod kakšnimi dodatnimi pogoji je grupa G skupaj z danim predpisom Abelova. N. D. Gupta [1] je pokazal, da je vsaka končna ali rešljiva grupa s predpisom oblike $c_n = [x, y]$ Abelova. Pokažemo lahko še, da je vsaka Engelova grupa reda 4 s predpisom oblike $c_n = [x, y]$ Abelova. Za nekatere predpise te omejitve niso potrebne, saj že avtomatično implicirajo komutativnost.

V nadaljevanju obravnavamo primera, ko je $n = 3$ oziroma $n = 4$. Za predpise oblike $c_3 = [x, y]$ je že v [5] dokazano, da brez dodatnih omejitev implicirajo, da je grupa Abelova, v [1] pa je enako dokazano za nekaj predpisov oblike $c_4 = [x, y]$. S podobnimi tehnikami kot v [5] lahko dokažemo

Izrek Če je na grupi $G = \langle u, v \rangle$ dan eden od predpisov oblike $c_4 = [x, y]$, je Abelova.

Math. Subj. Class. (1991): 20F12, 20F18, 20F45.

Ključne besede: predpisi na grupah, komutatorji, Engelove grupe, Abelove grupe.

Literatura

[1] N. D. Gupta: Some group laws equivalent to the commutative law, *Arch. Math. 17(1966), 97 - 102.*

[2] H. Heineken: Engelsche Elemente der Länge drei, *Illinois J. Math. 5(1961), 681 - 707.*

[3] G. Higman: Some remarks on varieties of groups, *Quart. J. Math., Oxford, II. Ser., 10(1959), 165 - 178.*

[4] B. Huppert: Endliche Gruppen I, *Springer-Verlag, 1967.*

[5] L.-C. Kappe, M. J. Tomkinson: Some conditions implying that a group is abelian, *Algebra Colloq. 3:3(1996), 199 - 212.*

[6] H. Neumann: Varieties of groups, *Springer-Verlag, 1967.*

[7] D. J. S. Robinson: A course in theory of groups, *Springer-Verlag, 1982.*

[8] M. Suzuki: Group theory II, *Springer-Verlag, 1985.*

[9] G. Traustason: Semigroup identities in 4-Engel groups, *sprejeto v objavo v Journal of Algebra.*