

Povzetek

V diplomskem delu najprej predstavimo koncept majorizacije in dvojno stohastičnih matrik ter izpeljemo Fanov princip maksimuma. S pomočjo simetričnih umeritvenih funkcij raziščemo unitarno invariantne norme operatorjev na \mathbb{C}^n in navedemo Fanov princip dominance. Za hermitsko $n \times n$ matriko A in primerno realno funkcijo f ustrezno definiramo $f(A)$ ter se seznanimo s pojmom operatorske monotonosti ter operatorske konveksnosti. Za operatorsko monotone funkcije poiščemo integralske reprezentacije in predstavimo zvezo s Pickovimi funkcijami. V drugem delu primerjamo normi $|||f(A) - f(B)|||$ in $|||f(|A - B|)|||$, kjer sta A, B poljubni pozitivni matriki in $||| \cdot |||$ poljubna unitarno invariantna norma. Dokažemo, da velja $|||f(A) - f(B)||| \leq |||f(|A - B|)|||$ za poljubno nenegativno operatorsko monotono funkcijo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in $|||g(A) - g(B)||| \geq |||g(|A - B|)|||$ za nenegativno naraščajočo funkcijo g na $[0, \infty)$, za katero je $g(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ in je inverzna funkcija g^{-1} operatorsko monotona. Primerjamo tudi normi $|||f(A) + f(B)|||$ in $|||f(A + B)|||$ in pokažemo, da je $|||f(A) + f(B)||| \geq |||f(A + B)|||$ za poljubno nenegativno operatorsko monotono funkcijo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in $|||g(A) + g(B)||| \leq |||g(A + B)|||$ za nenegativno naraščajočo funkcijo g na $[0, \infty)$, za katero je $g(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ in je inverzna funkcija g^{-1} operatorsko monotona.

Math. Subj. Class. (2000): 15A18, 15A45, 15A48, 15A51, 15A57, 15A60, 47A63.

Ključne besede: majorizacija, dvojno stohastična matrika, simetrična umeritvena funkcija, unitarno invariantna norma, operatorsko monotona funkcija, operatorsko konveksna funkcija, Pickova funkcija, neenakosti med normami.

Key words: majorization, doubly stochastic matrix, symmetric gauge function, unitarily invariant norm, operator monotone function, operator convex function, Pick function, norm inequalities.

Literatura

- [1] T. Ando: *Comparison of Norms $\|f(A) - f(B)\|$ and $\|f(|A - B|)\|$* , Math. Z. **197**, 403–409 (1988).
- [2] T. Ando, X. Zhan: *Norm inequalities related to operator monotone functions*, Math. Ann. **315**, 771–780 (1999).
- [3] R. Bhatia: *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] R. Bhatia: *Some inequalities for norm ideals*, Commun. Math. Phys. **111**, 33–39 (1987).
- [5] R. Bhatia, F. Kittaneh: *Norm inequalities for positive operators*, Letters Math. Phys. **43**, 225–231 (1998).
- [6] J. B. Conway: *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [7] J. W. Demmel, E. Zakrajšek: *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA-založništvo, 2000.
- [8] F. Hansen, G. K. Pedersen: *Jensen's Inequality for Operators and Löwner's Theorem*, Math. Ann. **258**, 229–241 (1982).
- [9] F. Hiai: *Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators*, Banach Center Publ. **38**, 119–181 (1997).
- [10] W. Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [11] X. Zhan: *Matrix Inequalities*, Springer, Berlin Heidelberg, 2002.