Povzetek

Naj bo $(X, \mathscr{M}, \mu)$ tak merljiv prostor s σ-končno mero μ, da je $\mathrm{L}^2(X, \mathscr{M}, \mu)$ separabilen Hilbertov prostor. Operator K na prostoru $\mathrm{L}^2(X, \mathscr{M}, \mu)$ je Hilbert-Schmidtov integralski operator, kadar obstaja taka funkcija k iz $\mathrm{L}^2(X\times X, \mathscr{M}\times\mathscr{M}, \mu\times\mu)$ (imenujemo jo integralsko jedro), da je $(Kf)(x) = \int_X k(x,y)f(y)\,d\mu(y)$. Predpostavimo še, da je σ-algebra $\mathscr{M}$ števno generirana.

V prvem delu diplomskega dela bomo obravnavali Hilbert-Schmidtove integralske operatorje s sledjo in dokazali, da z nekaj popravki velja formula

$$\operatorname{tr} K = \int_X k(x,x)\,d\mu(x).$$

V zgornji formuli bomo namreč integralsko jedro k zamenjali z neko drugo funkcijo, dobljeno s povprečenjem funkcije k po nekih σ-algebrah, vsebovanih v σ-algebri $\mathscr{M}$. Zgornja formula očitno ne drži, ker ni niti dobro definirana, saj je funkcija k podana le kot funkcija prostora $\mathrm{L}^2(X \times X, \mathscr{M} \times \mathscr{M}, \mu \times \mu)$. Ker integriramo po diagonali $\{(x,x);\, x \in X\}$, katere mera v prostoru $X \times X$ je nič, lahko vrednosti funkcije k na diagonali torej poljubno spreminjamo in k ob tem ostane isti element prostora $\mathrm{L}^2(X\times X, \mathscr{M}\times\mathscr{M}, \mu\times\mu)$.

V drugem delu bomo navedli potreben in zadosten pogoj, da ima pozitiven Hilbert-Schmidtov integralski operator končno sled.

V obeh delih bosta glavni orodji za dokazovanje Doobov konvergenčni izrek za martingale in Doobov izrek o maksimalnosti. Pomembna lastnost izrekov, ki so predstavljeni v diplomskem delu, je, da ne predpostavljajo zveznosti integralskega jedra in veljajo na zelo splošnem merljivem prostoru. Za prostor $(X, \mathscr{M}, \mu)$ dodatno namreč predpostavimo le, da je σ-algebra $\mathscr{M}$ števno generirana.

Math. Subj. Class. (2010): 47G10, 47B10, 60G42, 46E30, 28A25.

Ključne besede: integralski operatorji, Hilbert-Schmidtovi operatorji in operatorji s sledjo, martingali z diskretnim parametrom, L^p-prostori, Lebesgueov integral.

Keywords: integral operators, Hilbert-Schmidt operators and trace class operators, martingales with discrete parameter, L^p-spaces, Lebesgue integral.

Literatura

[1] W. Averson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] C. Brislawn, *Kernels of Trace Class Operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), str. 1181–1190.

[3] C. Brislawn, *Traceable Integral Kernels on Countably Generated Measure Spaces*, Pacific Journal of Mathematics **150** (1991), str. 229–240.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[5] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, 2000.

[6] R. E. Edwards in G. I. Gaudry, *Littlewood-Paley and Multiplier Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[7] F. Riesz in B. Szökefalvi-Nagy, *Functional Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco itd., 1987.