I. Uvod

Vprašanje limitnega vedenja vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk izvira iz Poissonovega izreka: Če je dano tako zaporedje poskusov

$$
\begin{array}{l}
a_{11} \\
a_{21}, a_{22} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,
\end{array}
$$

da so poskusi v vsaki vrsti med seboj neodvisni, in če ima dogodek D v vsakem poskusu iz n-te vrste verjetnost p_n, ki se od vrste do vrste spreminja tako, da je

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \qquad (\lambda > 0)$$

velja za frekvenco b_n dogodka v n-ti vrsti relacija

$$\lim_{n\to\infty} P\,(b_n = k) = (\lambda^k e^{-\lambda})/\,k!$$

za vsak cel nenegativen k.

Zastavimo vprašanje splošneje. Vzemimo dvojno zaporedje slučajnih spremenljivk

$$
\begin{array}{l}
X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k_1} \\
X_{21}, X_{22} \ldots, X_{2k_2} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

Spremenljivke so v vsaki vrsti med seboj neodvisne in $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$.

Zanima nas h katerim limitnim porazdelitvam lahko konvergira z rastočim n porazdelitvena funkcija vsote

$$Z_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n \tag{1}$$

za primerno izbrane A_n in kakšni so pogoji te konvergence. Če ne bi postavili dodatnih pogojev, bi bila lahko poljubna porazdelitvena funkcija F(x) limita porazdelitev zgornjih vsot. Naj bo npr. spremenljivka X_{n1} porazdeljena po zakonu F(x), vse druge spremenljivke v isti vrsti pa naj imajo z verjetnostjo 1 vrednost 0. Če postavimo še $A_n = 0$, so vse spremenljivke (1) porazdeljene po zakonu $F(x)$, ki je tako hkrati tudi limitna porazdelitev vsot (1).

Za vsote (1) bomo zahtevali posebne lastnosti, ki jih bomo natačneje obravnavali v V. Povedali bomo tudi različne oblike potrebnih in zadostnih pogojev za obstoj limitne porazdelitve. Te izreke bomo lahko uporabili za ugotavljanje pogojev za konvergenco k nekemu danemu limitnemu zakonu.

Bavli in Hinčin sta dokazala, da je vsaka porazdelitvena funkcija, ki je limita porazdelitvenih funkcij vsot (1) neomenjeno deljiva.

Pri dokazovanju izrekov se bomo sklicevali na nekatere že znane lastnosti porazdelitvenih in predvsem karakterističnih funkcij. Brez dokazov navedimo nekaj največkrat uporabljenih izrekov.

IZREK 1. Da porazdelitvene funkcije $F_n(x)$ šibko konvergirajo k funkciji $F(x)$ je potreben in zadosten eden od obeh pogojev

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ v vsaki točki x, v kateri je porazdelitvena funkcija $F(x)$ zvzena,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ na neki množici C, ki je povsod gosta na realni premici.

Kot je znano, je karakteristična funkcija $f(t)$ slučajne spremenljivke X definirana

$$f_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Karakteristična funkcija je enakomerno zvezna na vsem definicijskem območju, $|f(t)| \leq 1$ za vsak t in $f(0) = 1$.

IZREK 2. Karakteristična funkcija vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk je produkt karakterističnih funkcij členov.

IZREK 3. Karakteristična funkcija je natanko določena s svojo porazdelitveno funkcijo in obratno.

IZREK 4. Če so $f_n(t)$ in $f(t)$ karakteristične funkcije porazdelitev $F_n(x)$ in $F(x)$ in če je $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$

enakomerno na vsakem omejenem intervalu za t.

IZREK 5. Če je $f_n(t)$ karakteristična funkcija porazdelitve $F_n(x)$ in $f_n(t)$ konvergirajo, ko $n \to \infty$, za vsak t, k zvezni kunkciji f(t), potem porazdelitev $F_n(x)$ šibko konvergira k porazdelitvi F(x) s karakteristično funkcijo f(t).

Literatura

B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov: Limit distributions for sums of independent random variables, Cambridge, 1954

B. V. Gnedenko: Kurs teorii verojatnostej, Moskva 1954

R. Jamnik: O neomejeno deljivih in o stabilnih porazdelitvah, Obzornik za matematiko in fiziko, XIV. 1., Ljubljana 1967