

## Povzetek

Imamo homogeno linearno diferencialno enačbo  $n$ -tega reda

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

kjer so koeficienti  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  polinomi iz  $\mathbb{Q}[x]$ . Iščemo hiperekspontne rešitve te enačbe; to so rešitve  $y(x)$ , za katere velja  $y'(x)/y(x) \in \mathbb{C}(x)$ . Določitev hiperekspontnih rešitev je pomemben vmesni korak pri iskanju vseh Liouvilleovih rešitev dane diferencialne enačbe.

## Uvod

Pomembno vprašanje pri Ruffinijevih diferencialnih enačbah je, če ima dana diferencialna enačba rešitve v zaključeni obliki. Ukvarjali se bomo s homogeno linearno diferencialno enačbo  $n$ -tega reda

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

kjer so koeficienti  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  polinomi iz  $\mathbb{Q}[x]$ .

V prvem poglavju bomo predstavili diferencialno algebro in rezultate Galoisove teorije.

Diferencialni obseg  $K$  je obseg, v katerem obstaja neko odvajanje; to je preslikava  $' : K \rightarrow K$ , za katero velja  $(u + v)' = u' + v'$  in  $(uv)' = u'v + uv'$ . Diferencialni homomorfizem med dvema diferencialnima obsegoma je definiran kot homomorfizem obsegov, ki komutira z odvajanjem.

Če imamo diferencialni obseg  $M$  in diferencialni podobseg  $K$ , je diferencialna Galoisova grupa obsega  $M$  nad  $K$  grupa vseh diferencialnih avtomorfizmov, definiranih na obsegu  $M$ , ki so na podobsegu  $K$  identiteta. Označimo jo s  $G(M/K)$ .

Linearno diferencialna obsega  $M$  in  $K$ ,  $M \supset K$ . Praviemo, da je obseg  $M$  Liouvilleova razširitev obsega  $K$ , če obstaja zaporedje vmesnih diferencialnih obsegov

$$K = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = M,$$

take da za vsak  $i = 1, \dots, n$  velja ena od možnosti

(1)  $K_i = K_{i-1}(u)$ , kjer je  $u'/u \in K_{i-1}$  in pravimo, da je  $K_i$  prostoran z aditivno eksponentno funkcijo integrala.

(2)  $K_i = K_{i-1}(v)$ , kjer je  $v' + a_{i-1}v \in K_{i-1}$  in pravimo, da je  $K_i$  generiran s aditivno funkcijo integrala.

**Key words:** differential algebra, Liouville extension, differential equation, hyperexponential solution;

**Ključne besede:** diferencialna algebra, Liouvilleova razširitev, diferencialna enačba, hiperekspontna rešitev;

# Literatura

- [1] S.A. Abramov, Rational Solutions of Linear Differential and Difference Equations with Polynomial Coefficients, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics* 29, No.11, 1989.
- [2] M. Bronstein, On Solutions of Linear Ordinary Differential Equations in their Coefficient Field, *Journal of Symbolic Computation* 13, No.4, 1992.
- [3] M. Bronstein, Linear Ordinary Differential Equations: breaking through the order 2 barrier, in *Proceedings of ISSAC'92*, Berkeley, USA, ACM Press, 1992.
- [4] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1957.
- [5] J.J. Kovacic, An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations, *Journal of Symbolic Computation* 2, 1986.
- [6] M.F. Singer, Liouvillian Solutions of Linear Differential Equations with Liouvillian Coefficients, *Journal of Symbolic Computation* 11, 1991.
- [7] M.F. Singer, Liouvillian solutions of  $n^{\text{th}}$  Order Homogeneous Linear Differential Equations, *American Journal of Mathematics* 103, No.4, 1981.
- [8] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: an Introduction to Computational Geometry and Commutative Algebra*, Springer-Verlag New York, 1992.