Povzetek

Na različnih področjih matematike se hitro znajdemo pred vprašanjem, ali naj med aksiome privzamemo tudi Aksiom izbire. Da je lahko odločitev trezna, je potrebno raziskati ozadje tega aksioma. Intuicija se pogosto oglasi pri študiju izjav, ki veljajo natanko takrat, ko velja Aksiom izbire, torej izjav, ki so aksiomu ekvivalentne.

V tem delu sem zbral najbolj znane izreke, ki so aksiomu ekvivalentni. Razdelil sem jih v štiri skupine glede na področja matematike. Delo vsebuje tudi dokaze ekvivalenc med danimi izjavami.

Prvo poglavje vsebuje nekatere osnove teorije množic. Definiral sem teorijo ZFC in si s tem postavil temelje za dokazovanje v nadaljevanju.

V prvi, najobširnejši skupini ekvivalentnih izjav (predstavljeni v drugem poglavju) so izreki iz področja teorije množic. Posebej so omembe vredne zelo znane in marsikje uporabne izjave, kot sta Zornova lema in Princip dobre urejenosti. Med manj klasičnimi rezultati izstopa Aksiom večlične izbire.

Med topološkimi ekvivalencami je najbolj znan izrek Tihonova, ki pravi, da je kompaktnost multiplikativna topološka lastnost.

Najbolje poznan ekvivalenten algebraični izrek je obstoj baze v vektorskem prostoru. Poleg tega rezultata sem v četrtem poglavju dokazal tudi ekvivalentnost nekaterih izrekov iz področja mrež.

Na področju analize sem izpostavil Izrek o obstoju ekstremne točke v dualnem prostoru. Navedel sem nekatere znane izreke (npr. Krein-Milman, Banach-Alaoglu, Hahn-Banach, BPI), ki so šibkejši kot aksiom izbire, so pa nekateri pari teh izrekov aksiomu ekvivalentni.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): `04A25`, `03E25`

Ključne besede:
Aksiom izbire, Teorija množic, Zornova lema, Princip dobre urejenosti, izrek Tihonova, Hausdorffov princip maksimalnosti, Tukeyeva lema, Aksiom večlične izbire, Krein-Milmanov izrek, Banach-Alaoglujev izrek

Keywords:
Axiom of Choice, Set theory, Zorn lemma, Well order principle, Tychonoff's theorem, Hausdorff maximality principle, Tukey lemma, Axiom of multiple Choice, Krein-Milman theorem, Banach-Alaoglu theorem

Literatura

[1] A. Blass. *Freyd's models for the independence of the axiom of choice*, volume 116 of *Memoirs of the American mathematical society*. American Mathematical Society, 1989.

[2] U. Felgner and T. Jech. Variants of the axiom of choice in set theory with atoms. *Fund. Math.*, 79:79–85, 1973.

[3] J.D. Halpern and A. Levy. The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. *Proceedings of the Symposium in Pure Math. of the A.M.S.*, 13:83–134, 1971.

[4] T.J. Jech. *The Axiom of Choice*, volume 75 of *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North Holland Publishing Company, 1973.

[5] W.A.J. Luxemburg. Two implications of the method of construction by ultrapowers to analysis. *Bull. A.M.S.*, pages 416–419, 1962.

[6] W.A.J. Luxemburg. Reduced powers of the real number system and equivalents of the hahn-banach extension theorem. *Symposium on the Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability*, 1969.

[7] D. Pincus. Independence of the prime ideal theorem from the hahn-banach theorem. *Bull. A.M.S.*, 79:766–770, 1972.

[8] D. Pincus. The strength of the hahn-banach theorem. *Victoria Symposium on Nonstandard Analysis*, 1974.

[9] H. Rubin and J.E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*, volume 116 of *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North-Holland, 1985.

[10] H. Rubin and D. Scott. Some topological theorems equivalent to the prime ideal theorem. *Bull. A.M.S.*, 60:389, 1954.

[11] S. Wagon. *Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press.