POVZETEK VSEBINE

Za uspešno reševanje matematičnih in fizikalnih problemov velikokrat potrebujemo natančne ali vsaj približne vrednosti lastnih vrednosti.

Geršgorinov izrek pravi, da je območje, kjer se lastne vrednosti zagotovo nahajajo, Geršgorinova množica. Spoznamo, da lahko Geršgorinovo množico nahajanja lastnih vrednosti zmanjšamo, če upoštevamo podobnost matrik, saj so lastne vrednosti podobnih matrik enake. Geršgorinovo množico za matriko $X^{-1}AX$, kjer je X diagonalna matrika s komponentami vektorja $x \in \mathbb{C}^n$ na diagonali, imenujemo utežena Geršgorinova množica. Spekter matrike A je enak spektru podobne matrike $X^{-1}AX$, torej je spekter množice A podmnožica utežene Geršgorinove množice. Obravnavali smo število lastnih vrednosti, ki ležijo v komponentah utežene Geršgorinove množice. Ker je $x > 0$ edini pogoj za definicijo uteženih Geršgorinovih množic, lahko območje nahajanja lastnih vrednosti še zmanjšamo. Upoštevamo, da je vektor $x > 0$ poljuben in definiramo minimalno Geršgorinovo množico, ki je enaka preseku uteženih Geršgorinovih množic po vseh $x > 0$, in je manjša ali enaka Geršgorinovi množici, zagotovo pa vsebuje vse lastne vrednosti matrike.

Opazimo, da so minimalne Geršgorinove množice matrik, ki se od matrike A morda razlikujejo pri izvendiagonalnih elementih za faktor, ki je po absolutni vrednosti enak ena, enake minimalni Geršgorinovi množici matrike A, zato definiramo ekvimodularno množico in razširjeno ekvimodularno množico za matriko A, za kateri ugotovimo, da je spekter prve množice vsebovan v spektru druge množice, spekter obeh pa je podmnožica minimalne Geršgorinove množice. Prav tako pokažemo, kdaj poljubno kompleksno število leži v notranjosti ali na robu minimalne Geršgorinove množice. Raziskali smo, v kakšni relaciji so rob minimalne Geršgorinove množice, spekter ekvimodularne množica za matriko A, spekter razširjene ekvimodularne množice za matriko A in minimalna Geršgorinova množica matrike A. Ugotovimo, da relacije veljajo tudi, če je matrika A reducibilna. Dokažemo tudi, da obstajajo zvezdaste množice s središčem v diagonalnih elementih a_{ii}, $i = 1, ..., n$, ki so podmnožice minimalne Geršgorinove množice matrike A.

V zadnjem poglavju, še enkrat, tokrat s permutacijami, karakteriziramo spekter ekvimodularne množice za matriko A, za katerega ugotovimo, da je vsebovan v minimalni Geršgorinovi množici glede na permutacijo ϕ. Ker pa je slednja poljubna, je spekter ekvimodularne množice za matriko A vsebovan v preseku minimalnih Geršgorinovih množic po vseh permutacijah. Pokažemo, kdaj poljubno kompleksno število leži v notranjosti ali na robu minimalne Geršgorinove množice glede na permutacijo ϕ. Zapišemo relacije med robom minimalne Geršgorinove množice glede na premutacijo ϕ, spektrom ekvimodularne množice in minimalno Geršgorinovo množico glede na

permutacijo ϕ.

Če je matrika A nesingularna, je nesingularna tudi rotacijska ekvimodularna matrika za matriko A. Da v nekem smislu velja tudi obrat te trditve pove Camion-Hoffmanov izrek. Ta ugotovitev je v pomoč pri določanju, kdaj kompleksno število ni vsebovano v spektru ekvimodularne množice.

Ne le, da je spekter ekvimodularne množice vsebovan v preseku minimalnih Geršgorinovih množicah po permutacijah $\phi \in \Phi$, temveč velja med njima enakost. Nazadnje opišemo še netrivialne permutacije, saj pomagajo opisati spekter ekvimodularne množice za matriko A.

Klasifikacija: 15A18, 15A42, 15A48, 65F15.

Ključne besede: lastna vrednost, lastni vektor, Geršgorinova množica, minimalna Geršgorinova množica, permutacija.

Keywords: eigenvalue, eigenvector, Geršgorin set, minimal Geršgorin set, permutation.

Literatura

[1] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of equations,* Academic Press, New York, (1960).

[2] P. Camion and A. J. Hoffman, *On the nonsingularity of complex matrices,* Pacific J. Math. 17, (1966), 211-214.

[3] P. M. Cohn, *Algebra,* Volume 1, John Wiley and Sons, New York, 1997.

[4] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge University Press, Cambridge, (1985).

[5] R. S. Varga, *Geršgorin and His circles,* Springer-Verlag, New York, (2004).