Povzetek

> Une function entière, qui ne devient jamais ni à a ni à b est nécessairement une constante. (Cela funkcija, ki ni nikjer enaka niti a niti b, mora biti konstantna.)
>
> – E. Picard, 1879

Sinusna funkcija zavzame kot vrednosti vsa kompleksna števila; eksponetna funkcija izpusti le vrednost 0. Ta primera sta značilna za obnašanje celih funkcij. Slavni izrek E. Picarda pravi, da vsaka nekonstantna funkcija ne zavzame kvečjemu ene vrednosti. Ta tako-imenovani Mali Picardov izrek je presenetljiva posplošitev Liouvilleovega izreka.

Pomembna je opazka A. Blocha, o togosti gladke funkcije, da velikost lokalne spremembe holomorfne funkcije zahteva vsebovanost sorazmerno velikih diskov v sliki. Podrobnosti so podrobneje obravnavane v 1. poglavju. Celim funkcijam je namenjeno 2. poglavje. Mali Picardov izrek pridobimo z uporabo Blochovega izreka in leme Landaua, potem si ogledamo zanimivi uporabi.

V 3. poglavju predstavimo klasični izrek Schottkya. Ta vodi do Landauejeve posplošitve Malega Picardovega izreka na disk in izrekov Montela in Vitalija o normalnih družinah holomorfnih funkcij na območju G. Bistvena singularnost holomorfne funkcije je tema 4. poglavja. Kratek dokaz Velikega Picardovega izreka je podan na podlagi Montelovega izreka.

Da se lahko spoprimemo tudi z meromorfnimi funkcijami, njihove vrednosti opazujemo na Riemanovi sferi. Martyjev izrek v 5. poglavju je ekvivalent Montelovega izreka o lokalni omejenosti normalnih družin za meromorfne funkcije. Pokažemo, da Möbiusova transformacija ohranja normalnost družine. Potem na podlagi konvergentnih zaporedij opazujemo singularnosti meromorfnih funkcij.

Liouvilleov izrek pravi, da je omejena cela funkcija konstanta. Montelov izrek trdi, da je na vsakem območju, omejena družina funkcij normalna. Takšno korespondenco med celimi funkcijami in normalnimi družinami je opaziti tudi pri drugih lastnostih funkcij. Tem hevrističnem principu pravimo Blochov princip, ki je tema 6. poglavja. Predstavimo najbolj osnovni obliki Zalcmanove leme in principa, slednji poda zadosten pogoj, da je družina funkcij na območju G normalna.

V zadnjem poglavju posplošimo Montelov in Veliki Picardov izrek.

Diplomsko delo sem skušal čim bolj slikovno opremiti in poiskati vsaj nekaj primerov k izrekom in trditvam. Dokazi so, upam da, berljivi. Želim prijetno branje.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): `30D30, (30D20, 30D45)`

Ključne besede:
matematika, kompleksna ravnina, disk, Blochov izrek, cela funkcija, meromorfna funkcija, normalna družina, Montelov izrek, bistvena singularnost, Picardov izrek, sferična (prečna) metrika, sferični odvod, Blochov princip, Möbiusova transformacija

Keywords:
mathematics, complex plane, disk, Bloch's Theorem, entire function, meromorfic function, normal family, Montel's Theorem, essential singularity, Picard's Theorem, chordal metric, spherical derivative, Bloch's Principle, Möbius's transform

Slovar izrazov:

$\mathbb{C}$	kompleksna ravnina
$\mathbb{C}^\times$	punktirana kompleksna ravnina $\mathbb{C}\backslash\{0\}$
Δ	enotski disk $\{z \in \mathbb{C}; \lvert z\rvert < 1\}$
$\Delta^\times$	punktiran enotski disk $\Delta\backslash\{0\}$
G	območje
K	kompaktna množica
$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$	družina funkcij
$D(a,r)$	odprt disk s središčem v točki a in radijem r
$\mathbb{C}^{\mathrm{K}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kompaktificirana kompleksna ravnina
$\mathcal{O}(G)$	holomorfne funkcije na območju G
$\mathcal{M}(G)$	meromorfne funkcije na območju G
$\overline{G}$	območje $G \cup \partial G$
E.P.K.	okrajšava za konvergenco - enakomerno po kompaktih
$N(f)$	ničle funkcije f
$P(f)$	poli funkcije f

Literatura

[1] L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 359–364, Coll. Papers 1, 350–364.

[2] W. Bergweiler, *Bloch's principle*, Comput. Methods Funct. Theory 6 (2006), št. 1, 77–108.

[3] A. Bloch, *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la thórie de l'uniformisation*, C.R. Acad. Sci. Paris **178** (1924), 2051–2052.

[4] A. Bloch, *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la thórie de l'uniformisation*, Ann. Sci. Univ. Toulouse **17** (1925), 1–22.

[5] M. Bonk, *On Bloch's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 2,889–894.

[6] É. Borel, *Démonstration élémentarie d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières*, C.R. Acad. Sci. Paris **122** (1896), 1045–1048, Œuvres 1, 571–574.

[7] T. Estermann, *Notes on Landau's proof of Picard's 'Great' Theorem, 101-106*, Studies in Pure Mathematics (ed. L.Mirsky presented to R.Rado, ur.), Acad. Press London, New York, 1971.

[8] E. Hille, *Analytic Funkction Theory*, vol. 2, Ginn, Boston, 1962.

[9] H. König, *Über die Landausche Verschärfung des Schottkyschen Satzes*, Arch. Math. **8** (1957), 112–114.

[10] E. Landau, *Über eine Verallgemeinerung des Picardeschen Satzes*, Sitz.-Ber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1904), 1118–1133, Coll. Works 2, 129–144.

[11] E. Landau, *Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante*, Sitz.-Ber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1926), 467–474, Coll. Works 9, 17–24.

[12] E. Landau, *Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten*, Math. Zeitschr. **30** (1929), 608–634, Coll. Works 9, 75–101.

[13] E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 1st ed. 1916; 2nd ed. 1929; 3rd ed. with supplements by D. Gaier, Springer, Heidelberg, 1986.

[14] C.D. Minda, *Bloch constants*, Journ. Analyse Math. **41** (1982), 54–84.

[15] E. Picard, *Œuvres 1.*

[16] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1998.

[17] A. Robinson, *Mathematical problems*, vol. 38, J. Symbolic Logic, 1973.

[18] F. Schottky, *Über den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen*, Sitz.-Ber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1904), 1244–1262.

[19] H. Yanagihara, *On the localy univalent Bloch constant*, Journ. Anal. Math. **65** (1995), 1–17.

[20] L. Zalcman, *Normal families: new perspectives*, Buletin of the Amer. Math. Soc. **35** (1998), št. 3, 215–230.