Povzetek. Delo obravnava absolutne normalizirane norme na $\mathbb{C}^n$. Pokažemo, da je množica vseh absolutno normaliziranih norm na $\mathbb{C}^n$ v bijektivni korespondenci z množico Ψ_n vseh zveznih konveksnih funkcij na simpleksu Δ_n pri določenih pogojih. Kot uporabo te trditve pokažemo, da je vsaka absolutna normalizirana norma na $\mathbb{C}^n$ strogo konveksna natanko tedaj, ko je pripadajoča funkcija ψ strogo konveksna na simpleksu Δ_n. Nadalje definiramo direktno vsoto $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ Banachovih prostorov X_i, $1 \leq i \leq n$ opremljeno s pripadajočo normo $\|\cdot\|_\psi$ in definiramo strogo konveksnost prostora $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$. Ocenimo še von Neumann-Jordanovo konstanto $C_{NJ}(\|\cdot\|_\psi)$ na $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$, pri čemer je $\|\cdot\|_\psi$ absolutna normalizirana norma na $\mathbb{C}^n$ podana s funkcijo ψ.

Abstract. In this dissertation, we study the absolute normalized norms on $\mathbb{C}^n$. We show, that the set of all absolute normalized norms on $\mathbb{C}^n$ is in one-to-one correspondence with the set Ψ_n of all continuous convex functions on the simplex Δ_n with some suitable conditions. As some applications, we show that an absolute normalized norm on $\mathbb{C}^n$ is strictly convex if and only if the corresponding function ψ on Δ_n is strictly convex. We also introduce the notion of direct sum $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ of Banach spaces X_i, $1 \leq i \leq n$, equiped with the associated norm with ψ and characterize the strict convexity of $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$. Lastly we give an estimate of the von Neumann-Jordan constant $C_{NJ}(\|\cdot\|_\psi)$ of the complex space $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$, where $\|\cdot\|_\psi$ is the absolute normalized norm on $\mathbb{C}^n$ given by the function ψ.

Math. Subj. Class. (2000): 46B20, 46B99, 26A21, 52A21

Ključne besede: absolutne normalizirane norme, stroga konveksnost, von Neumann-Jordanova konstanta, direktna vsota Banachovih prostorov

Keywords: absolute normalized norms, strict convexity, von Neumann-Jordan constant, direct sum of Banach spaces

7 Zaključek

V tem delu obravnavamo absolutne normalizirane norme na $\mathbb{C}^n$. Opazujemo takšne norme na $\mathbb{C}^2$ in pokažemo, da je množica vseh takšnih norm v bijektivni korespondenci z množico Ψ_2 vseh zveznih konveksnih funkcij na simpleksu $\Delta_2 = [0,1]$, pri pogojih $\psi(0) = \psi(1) = 1$ in $\max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$, za $t \in [0,1]$. To trditev posplošimo na $\mathbb{C}^n$ in ter ugotovimo, da je množica vseh absolutnih normaliziranih norm na $\mathbb{C}^n$ v bijektivni korespondenci z množico Ψ_n vseh zveznih konveksnih funkcij na simpleksu Δ_n, ki ustrezajo pogojem

$$\begin{aligned}
\psi(0,0,...,0) &= \psi(1,0,...,0) = \psi(0,1,0,...,0) = \cdots = \psi(0,...,0,1) = 1, && (A_0)\\
\psi(s_1,\dots,s_{n-1}) &\geq (s_1+\ldots+s_{n-1})\;\psi\left(\frac{s_1}{s_1+\ldots+s_{n-1}},\dots,\frac{s_{n-1}}{s_1+\ldots+s_{n-1}}\right), && (A_1)\\
\psi(s_1,\dots,s_{n-1}) &\geq (1-s_1)\;\psi\left(0,\frac{s_2}{1-s_1},\dots,\frac{s_{n-1}}{1-s_1}\right), && (A_2)\\
&\vdots\\
\psi(s_1,\dots,s_{n-1}) &\geq (1-s_{n-1})\;\psi\left(\frac{s_1}{1-s_{n-1}},\dots,\frac{s_{n-2}}{1-s_{n-1}},0\right). && (A_n)
\end{aligned}$$

S tem izrekom lahko na enostven način dobimo absolutne normalizirane norme, ki niso ℓ_p-norme.

Nadalje pokažemo, da za vsako $\psi \in \Psi_n$ pripadajoča norma $\|\cdot\|_\psi$ strogo konveksna natanko tedaj, ko je ψ strogo konveksna na Δ_n. Definiramo ψ-direktno vsoto Banachovih prostorov X_i, $1 \leq i \leq n$ opremljenih z normo $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\psi = \|(\|x_1\|_{X_1},\dots,\|x_n\|_{X_n})\|_\psi$ in označimo z $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$. Tako definirana norma predstavlja absolutno normalizirano normo na $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$. Definiramo še strogo konveksnost direktne vsote $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ ter pokažemo, da je $(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n)_\psi$ strogo konveksna natanko tedaj, ko so prostori X_i strogo konveksni za $1 \leq i \leq n$ in funkcija ψ strogo konveksna.

Pogledali smo si tudi von Neumann-Jordanovo konstanto normiranega prostora X, to je najmanjša konstanta C za katero je izpolnjena neenakost

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq C, \qquad \forall\, x,y \in X,\ \|x\|+\|y\| \neq 0.$$

Pokazali smo eksistenco takšne konstante in ugotovili, da je omejena $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$. Nadalje smo na prostoru $\mathbb{C}^n$ ocenjevali to konstanto s pomočjo absolutnih normaliziranih norm in konstant

$$C_{\psi,\phi} = \max_{t\in\Delta_n}\left\{\frac{\psi(t)}{\phi(t)}\right\}, \qquad \forall\,\psi,\phi \in \Psi_n.$$

S pomočjo teh ocen smo izračunali NJ-konstanto za ℓ_1- in ℓ_∞-normo na $\mathbb{C}^2$ in dobili

$$C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1) = C_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty) = 2.$$