

Povzetek

Medianski graf je graf, v katerem ima poljubna trojica njegovih vozlišč u, v, w enolično mediano, tj. vozlišče, ki leži na neki najkrajši u, v -poti, neki najkrajši u, w -poti in neki najkrajši v, w -poti. Medianski grafi so delne kocke, tj. izometrični podgrafi hiperkock. Izometrična dimenzija grafa G , označena z $\dim_I(G)$, je najmanjše tako število k , da lahko G izometrično vložimo v hiperkocko Q_k .

V diplomskem delu bomo predstavili osnovne lastnosti in primere medianskih grafov. Navedli bomo algoritem za njihovo prepoznavanje, ki temelji na ekvivalenčnih razredih relacije Θ , posebne relacije na povezavah grafa. Izbrani algoritem lahko implementiramo s časovno zahtevnostjo $O(mn)$ in prostorsko zahtevnostjo $O(n^2)$, pri čemer je n število vozlišč, m pa število povezav grafa. Navedli bomo tudi idejo izboljšave algoritma za prepoznavanje medianskih grafov, s čimer bomo utemeljili časovno zahtevnost $O((m \log n)^{1.41})$. Sledil bo še algoritem za vložitev medianskih grafov v hiperkocke. Ta temelji na teoriji delnih urejenosti. Medianske grafe lahko povežemo s pojmom medianskih pol mrež, ki so posplošitve distributivnih mrež. Lastnosti medianskih pol mrež nam dajo osnovo za algoritem za izometrično vložitev medianskih grafov v hiperkocke s časovno zahtevnostjo $O(n \cdot \dim_I(G))$. Izometrično dimenzijo grafa lahko izračunamo v času $O(m + n)$.

Abstract

A median graph G is a graph where, for any three vertices u, v and w , there exists a unique vertex that lies on a shortest path from u to v , from u to w and from v to w . Median graphs are partial cubes, that is, they can be isometrically embedded in hypercubes. The isometric dimension of G , denoted as $\dim_I(G)$, is the smallest integer k so that G can be isometrically embedded in Q_k .

We describe basic properties and examples of median graphs. We present the recognition algorithm for median graphs, which is based on relation Θ on the edge set of a graph. Next, we show that median graphs can be recognised in $O(mn)$ time and $O(n^2)$ space, where $n = |V(G)|$ and $m = |E(G)|$. We propose an idea of a faster recognition algorithm with time complexity $O((m \log n)^{1.41})$. We present the algorithm for isometric embedding of median graphs into a hypercube. It relies on the theory of median semilattices, which are generalizations of distributive lattices and are related to median graphs. Finally, we show that any median graph can be isometrically embedded into a hypercube in $O(n \cdot \dim_I(G))$ time. Isometric dimension of median graph can be computed in $O(m + n)$ time.

Math. Subj. Class. (2010): 05C12, 05C85, 06A06, 06D75, 68R10

Ključne besede: Medianski graf, izometrična vložitev, hiperkocka, delna kocka, delna urejenost, medianska pol mreža

Keywords: Median graph, isometric embedding, hypercube, partial cube, poset, median semilattice

Literatura

- [1] C. T. Cheng: *A poset-based approach to embedding median graphs in hypercubes and lattices*. Order, v tisku: DOI: 10.1007/s11083-011-9203-7.
- [2] W. Imrich, S. Klavžar: *Product Graphs: Structure and Recognition*. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [3] W. Imrich, S. Klavžar, H. M. Mulder: *Median graphs and triangle-free graphs*. SIAM J Discrete Math 12, 1999, str. 111–118.
- [4] W. Imrich, S. Klavžar, Douglas F. Rall: *Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Product*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2008.
- [5] D. C. Kozen: *The Design and Analysis of Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1992.