Povzetek

Naj bo L enostavna gladka sklenjena in pozitivno orientirana krivulja, ki razdeljuje kompleksno ravnino na območje D^+ na levi ter območje D^- na desni strani krivulje. Naj bosta $g(t)$ in $f(t)$ funkciji, ki na krivulji L zadoščata *Hölderjevemu pogoju* in naj bo za vse t na L funkcija $g(t)$ od nič različna. Iščemo odsekoma analitično funkcijo

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & \text{za } z \in D^+, \\ \Phi^-(z) & \text{za } z \in D^-, \end{cases}$$

ki je analitična na območjih D^+ in D^-, v neskončnosti enaka nič, na krivulji L pa zadošča enačbi

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t) \tag{0.1}$$

oziroma

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t) + f(t). \tag{0.2}$$

Enačbo (0.1) imenujemo ***homogeni***, enačbo (0.2) pa ***nehomogeni Riemann–Hilbertov problem***. Funkcijo $g(t)$ imenujemo *koeficient Riemann–Hilbertovega problema*, funkcijo $f(t)$ pa njegov *prosti člen*.

Rešitev Riemann–Hilbertovega problema je tesno povezana z *integralom Cauchyjevega tipa*

$$\Phi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, \mathrm{d}\tau, \tag{0.3}$$

kjer je $\varphi(t)$ neka določena funkcija odvisna od funkcij $g(t)$ in $f(t)$.

V uvodu bomo predstavili nekaj pomembnih fizikalnih in matematičnih problemov, ki jih lahko rešujemo s pomočjo teorije Riemann–Hilbertovih problemov.

V drugem poglavju bomo navedli *Plemljevo formulo*, ki nam za točko t na krivulji L podaja limitni vrednosti $\Phi^+(t)$ in $\Phi^-(t)$ integrala Cauchyjevega tipa izraženega v (0.3). Ogledali si bomo tudi obnašanje integrala (0.3) v bližini krajišč končne nesklenjene krivulje ter v točkah nezveznosti funkcije $\varphi(t)$. Končno nesklenjeno krivuljo lahko dopolnimo do sklenjene in pri tem na dodanem delu funkciji $\varphi(t)$ pripišemo vrednost nič. Problem tako prevedemo na že znanega.

V tretjem poglavju bomo definirali *indeks funkcije* in indeks funkcije $g(t)$ v enačbah (0.1) in (0.2) imenovali kar *indeks Riemann–Hilbertovega problema*. Podali bo-

mo splošni rešitvi homogenega RH–problema (0.1) in nehomogenega RH–problema (0.2) za različne vrednosti indeksa funkcije $g(t)$. Riemann–Hilbertov problem na končnih (sklenjenih ali ne) krivuljah bomo razširli na problem na realni osi kompleksne ravnine. Razširili bomo tudi pojem indeksa RH–problema in za različne vrednosti podali njegove rešitve.

V zadnjih poglavjih bomo delovanje Riemann–Hilbertovega problema predstavili na primerih. Naj za kompleksni parameter k funkcija $\hat{q}(k)$ predstavlja *Fourierjevo transformacijo funkcije* $q(x)$. Naj za premico l na ravnini $\mathbb{R}^2$, katere smer je določena z enotskim vektorjem $\underline{k}$ in je od izhodišča oddaljena za p, funkcija

$$\breve{f}(\underline{k}, p) = \int_l f(x, y) \mathrm{d}\tau$$

predstavlja *Radonovo transformacijo funkcije* $f(x, y)$. Pokazali bomo, da lahko na rekonstrukcijo funkcij $q(x)$ in $f(x, y)$ preko Fourierjeve oziroma Radonove transformacije gledamo kot na Riemann–Hilbertov problem.

Math. Subj. Class. (2010): 30E20, 30E25, 34M50, 35Q15, 42A38, 44A12.

Ključne besede: integral Cauchyjevega tipa, Riemann–Hilbertov problem, Fourierjeva transformacija in njen inverz, Radonova transformacija in njen inverz.

Keywords: Cauchy type integral, Riemann–Hilbert problem, Fourier transform and its inverse, Radon transform and its inverse.

Literatura

[1] F. D. Gakhov: *Boundary Value Problems*, Pergamon Press Ltd., Oxford, 1966,

[2] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas: *Complex Variables, Introduction and Applications*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2003,

[3] N. I. Muskhelishvili: *Singular Integral Equations, Boundary Problems of Function Theory and Their Application to Mathematical Physics*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holland, 1953,

[4] L. V. Ahlfors: *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, Second Edition, McGraw–Hill Book Company, New York, 1966,

[5] R. Narasimhan, Y. Nievergelt: *Complex Analysis in One Variable*, Second Edition, Birkhauser Boston, Boston, 2001,

[6] Y. Pinchover, J. Rubinstein: *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.