Povzetek

Na mnogih področjih matematike v teoretičnih in praktičnih nalogah pogosto uporabljamo lastne vrednosti matrike in njim pripadajoče lastne vektorje. Katero numerično metodo uporabimo za iskanje lastnih vrednosti matrike, je odvisno od tega, kakšnega tipa je matrika (simetrična, kompleksna, razpršena, polna itd.) ter kakšne lastne vrednosti iščemo (največjo, najmanjšo) oziroma katere lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje želimo dobiti. Velikokrat poznamo postopke za računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, vendar enačb ne znamo rešiti, zato skušamo izračunati lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje z boljšimi ali slabšimi aproksimacijami. Lastna vrednost dane kvadratne realne matrike **A**, dimenzije $n \times n$, je realno ali kompleksno število λ in sicer tako, da je vektorska enačba:

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$$

netrivialno rešljiva. Ta netrivialna rešitev se imenuje lastni vektor matrike **A**, ki ustreza lastni vrednosti λ. Z Gerschgorinovim izrekom ocenimo področje lastnih vrednosti. Vsaka lastna vrednost leži v enem tako imenovanem Gerschgorinovem krogu. Prvo po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost določimo s potenčno metodo. Uporabimo lahko dve aproksimaciji, in sicer Rayleighev kvocient ali kvocient med k-to komponento vektorja $\mathbf{x}_v$ in k-to komponento vektorja $\mathbf{x}_{v+1}$. Hitrost konvergence lastne vrednosti je definirana kot kvocient druge in prve lastne vrednosti. Za simetrično matriko je Rayleighev kvocient še posebej ugoden, kajti hitrost konvergence s pomočjo Rayleighevega kvocienta je dvakrat večja kot hitrost aproksimacije kvocienta med k-to komponento vektorja $\mathbf{x}_v$ in k-to komponento vektorja $\mathbf{x}_{v+1}$. Pri aproksimacijah uporabimo normirane vektorje, da preprečimo neomejeno rast lastnih vrednosti in pripadajočih lastnih vektorjev. Potenčna metoda ima določene pomanjkljivosti, ki jih lahko odpravimo z inverzno potenčno metodo.

S potenčno metodo lahko v osnovi izračunamo največjo lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor. Za izračun ostalih vmesnih lastnih vrednosti uporabimo matrike, ki jih modificiramo, in sicer s pomočjo redukcije in deflacije matrike. Redukcija in deflacija matrike ohranjata simetričnost matrike. Natančnost računanja lastnih vrednost je pri obeh modifikacijah matrike pri manjših matrikah enaka, pri velikih matrikah pri redukcij matrike pa lahko pride do večjih napak. Pri posameznem načinu modificiranja matrike je vidna razlika v številu operacij. Deflacija matrike je pri razpršenih simetričnih matrikah nesmiselna. S pomočjo modificiranih shem potenčne metode je smiselno izračunati le nekaj lastnih vrednosti, ne pa vseh.

Math. Subj. Class. (1991):65F15, 65F50

Key words: The power method, Eigenvectors, Eigenvalues, Rayleigh quotient, Sparse symmetric matrix

Literatura

[1] Zvonimir Bohte: Numerične metode, Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1985.

[2] Jože Grasselli: Linearna algebra,
Alojz Vandal: Linearno programiranje, Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1986.

[3] Eugen Isaacson, Herbert Bishop Keller.: Analysis of numerical methods, New York, John Wiiley & Sons 1966.

[4] Mervič Nataša: Zapiski iz Računalništva I, Ljubljana 1995/1996.

[5] Gabrijel Tomšič: Izbrana poglavja iz matematike.

[6] Ivan Vidav: Algebra, Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1989.