

1 Naloga predstavlja nekaj osnovnega orodja za ocenjevanje perturbacij lastnih vrednosti matrik: majorizacijo, singularne vrednosti, simetrične merilne funkcije in unitarno invariantne norme.

Math. Subj. Class. (1991): 15A18, 15A42

Key words: Symmetric Gauge Function, Majorisation, Singular Values

$$(i) \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Matrika A ima v vsaki vrstici in vsakem stolpcu po en element vrednosti 1, $n \times n$ matrika A je torej stohastična matrika.

Vredninski vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ iz \mathbb{R}^n . Njegove komponente urejene v padajočem vrstnem redu in jih označimo s

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$$

Iste komponente urejene v naraščajočem vrstnem redu, bomo označevali s

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Označimo še

$$x_+ = (x_{[1]}, \dots, x_{[n]})$$

$$x_- = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$$

Imajeva $x, y \in \mathbb{R}^n$. Reči bomo, da y majorizira x , kadar velja

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]} \quad k=1, 2, \dots, n$$

To je enakovredno predpogoju $x \prec y$. To bomo zapisali kot $x \prec y$.

Naslednji izrek, znan kot Hardyjevo, Littlewoodovo in Polyaev rezultat, je osnovni rezultat proučevanja majorizacij.

Izrek 1 (HLP) Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ ob predpostavki pogoja

$$x \prec y,$$

(i) obstaja dvoje diagonalna matrika A , da je $x = Ay$.

(ii) obstaja n -tupel pozitivnih realnih števil w_1, \dots, w_n , ki jih dobimo s permutiranjem komponent vektorja y .

Dokaz

(i) \Rightarrow (ii). Vzemimo kot taka vektorja x in y , da bo $x_1 \geq \dots \geq x_n$ in $y_1 \geq \dots \geq y_n$. Ker je $x = y$ trditve očito izhaja predpostavimo, da je $x \neq y$. Prilčimo najprej

3. Literatura

- [1] R. Bhatia, Perturbation bounds for matrix eigenvalues, Pitman research notes in mathematics series, 1987.
- [2] F. Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, Banach Center Publications volume 38 (1997), 119-181.
- [3] P. Halmos, Finite-dimensional vector spaces, Springer-Verlag, 1974.