# *POVZETEK*

Obliko ploskve v prostoru lahko opišemo tako, da podamo povprečno ukrivljenost za vsako točko na njeni površini. Neko obliko lahko okarakteriziramo tudi z integralom povprečne ukrivljenosti po površini ploskve. V predloženem delu obravnavamo oblike, ki imajo ekstremen integral povprečne ukrivljenosti po površini ploskve. Upoštevamo, da ploskev omejuje neko osnosimetrično telo, ki ima v splošnem predpisano površino in predpisano prostornino. Definiramo ustrezen variacijski problem in ga prevedemo na pripadajočo Poisson-Eulerjevo diferencialno enačbo. Obravnavamo nekatere rešitve te enačbe, jih grafično prikažemo in ugotovimo, kje se obravnavane oblike nahajajo na faznem diagramu možnih oblik pri izbranih vezeh; pokažemo, kakšen je pomen oblik z ekstremnim integralom povprečne ukrivljenosti pri opisu fosfolipidnih dvojnih plasti in ugotovimo, kako se izračunane oblike ujemajo z opaženimi.



Math.subj.class.: differential geometry 53-xx, calculus of variations and optimal control; optimization 49-xx

Ključne besede: integral povprečne ukrivljenosti, isoperimetrični kvocient, fosfolipidni mehurčki

Keywords: average mean curvature, isoperimetric quotient, phospholipid vesicles

## 4. RAZPRAVLJANJE IN ZAKLJUČEK

V tem delu smo določali oblike, ki jih omejuje zaključena ploskev. Za približen opis oblike smo uporabili njen isoperimetrični kvocient in integral povprečne ukrivljenosti po površini ploskve. Zastavili smo variacijski problem za ekstrem integrala povprečne ukrivljenosti po površini ploskve in poiskali nekatere rešitve tega problema. Ugotovili smo, da so pri izbrani površini ploskve in izbrani prostornini, ki jo ploskev omejuje, rešitve variacijskega problema sistem krogel z dvema različnima polmeroma, valj in torus. Pri izbrani površini je rešitev problema krogla in odsek ravnine; pri izbrani prostornini je rešitev krogla, če pa ni omejitev, sta rešitvi valj in stožec. Od teh rešitev ustrezajo zaključeni površini sistem krogel,okrogla plošča s toroidnim zaključkom in torus, ki jih predstavimo na ($\langle h \rangle$,$IQ$) faznem diagramu. Z ustreznim kombiniranjem rešitev lahko dobimo še mnogo oblik. Pri tem pa moramo preveriti, ali oblika izpolnjuje pogoje za ekstrem. Te pogoje izpolnjujejo oblike, pri katerih je število parametrov, ki določajo obliko, enako številu vezi in robnih pogojev, ki jim mora oblika zadostiti (Elsgolc, 1961).

Predstavljeni variacijski problem za ekstrem integrala povprečne ukrivljenosti po površini ploskve pri izbrani prostornini in izbrani površini je ekvivalenten variacijskima problemoma za ekstrem prostornine pri izbrani površini in izbranem integralu povprečne ukrivljenosti po površini ploskve, in za ekstrem površine pri izbrani prostornini in izbranem integralu povprečne ukrivljenosti po površini ploskve. Zato imajo vsi ti problemi enake rešitve.

Rešitev variacijskega problema za ekstrem prostornine pri izbrani površini in izbranem integralu povprečne ukrivljenosti po površini ploskve, ki ustreza sistemu krogel (ali njihovih delov) z dvema različnima polmeroma je že znana (Svetina in Žekš, 1989; 1996). Rešitev, ki ustrezajo valjem in torusom, pa pred tem nismo zasledili v literaturi in jih v okviru tega dela predstavljamo prvič.

Nekatere opažene oblike fosfolipidnih mehurčkov ustrezajo dobljenim rešitvam, iz česar sklepamo, da princip ekstrema integrala povprečne ukrivljenosti po površini ploskve lahko pri določenih pogojih predstavlja tudi minimum proste energije fosfolipidnega mehurčka v okolni raztopini.

## LITERATURA


- Berndl K., Käs J., Lipowsky R., Sackmann E., Seifert U., Shape transformations of giant vesicles; extreme sensitivity to bilayer asymmetry, Europhys. Lett. 13 : 659 (1990)Canham P.B., The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of human red blood cell. J. Theor. Biol. 26: 61 (1970)
- Deuling H.J.,Helfrich W.,The curvature elasticity of fluid membranes. J. Phys. (France) 37:1335 (1976)
- Elsgolc L.E., Calculus of variations, Pergamon Press, Oxford ,1-82 (1963)
- Evans E.A., Bending resistaance and chemically induced moments in membrane bilayers. Biophys. J. 14: 923 (1974)
- Fourcade B., Michalet X., Bensimon D., Vesicles of complex topology. V : Handbook of nonmedical applications of liposomes, urednika Lasič D. in Barenholz Y., CRC Press, Boca Raton, pp. 13 – 42 (1996)

- Heinrich V., Theoretische Bestimmung von Kugelnähen Vesikelformen mit Hilfe von Kugelfunktionen, Doktorsko delo, Humboldt Universität, Berlin (1993)
- Helfrich W., Elastic properties of lipid bilayers: theory and posssible experiments. Z. Naturförsch., 28c: 693 (1973)
- Iglič A., Hägerstrand H., Kralj-Iglič V., Bobrowska-Hägerstrand M., A possible physical mechanism of red blood cell vesiculation obtained by incubation at high pH. J. Biomechanics 31 : 151 (1998)
- Käs J., Sackmann E., Podgornik R., Svetina S., Žekš B., Thermally induced budding of phospholipid vesicles. A discontinued process. J.Phys.ll (Paris) 3:631 (1993)
- Kralj-Iglič V., Batista U., Hägerstrand H., Iglič A., Majhenc J., Sok M., On mechanisms of cell plasma membrane vesiculation. Radiol. Oncol. 32: 119 (1998)
- Pisanski T., Isoperimetric quotient for fullerenes and other polyhedral cages. J. Chem. Inform. Comp. Sci. 37: 1028 (1997)
- Seifert U., Lipowsky R., Shapes of fluid vesicles. V: Handbook of nonmedical aplications of liposomes, urednika Lasič D. and Barenholz Y., CRC Press, Boca Raton, pp. 43-68 (1996)
- Sheetz M.P., Singer S.J., Biological membranes as bilayer couples. A molecular mechanism of drug-erythrocyte interactions. Proc. Natl. Acad., Sci. U.S.A. 71: 4457 (1974)
- Svetina S., Žekš B., Membrane bending energy and shape determination of phospholipid vesicles and red blood cells. Eur. Biophys. J. 17: 101 (1989)
- Svetina S., Žekš B., The mechanical behaviour of cell membranes as a possible physical origin of cell polarity. J. Theor. Biol. 146: 115 (1990)
- Svetina S., Žekš B., Elastic properties of closed bilayer membranes and the shapes of giant phospholipid vesicles. V: Handbook of nonmedical applications of liposomes, urednika Lasič D. and Barenholz Y., CRC Press, Boca Raton, pp. 13-42 (1996)
- Vidav I., Višja matematika ll. Diferencialna geometrija v prostoru. Državna založba Slovenije, pp. 337-382 (1975)